И. В. Ященко
С. А. Шестаков

ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ от А до Я 2018

АЛГЕБРА

ОГЭ 2018

ФГОС

МОДУЛЬНЫЙ КУРС

АЛГЕБРА

- методические рекомендации с разбором задач
- тренинги к каждому заданию
- тренировочные варианты в формате ОГЭ-2018

И. В. Ященко, С. А. Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс

Алгебра

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Я97

Ященко И. В., Шестаков С. А.

Я97 ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра. — М.: МЦНМО, 2018. — 148 с.

ISBN 978-5-4439-1197-7

Настоящее пособие предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике. Пособие содержит методические рекомендации с разбором типовых примеров к каждому заданию ОГЭ, подготовительные и зачётные тренинги к каждому заданию ОГЭ, тренировочные работы в формате ОГЭ, соответствующие текущим спецификации и демоверсии экзаменационной работы.

Такая структура пособия представляется универсальной, она позволяет познакомиться со всем спектром заданий открытого банка ОГЭ по математике и методами их решения, обеспечить качественную и полноценную подготовку к экзамену на любом уровне.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1197-7

Предисловие

Настоящее пособие является первой частью модульного курса «ОГЭ по математике от А до Я» и предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике (модуль «Реальная математика», задания 14—20 варианта ОГЭ по математике). В последние годы определилась устойчивая структура экзамена: экзаменационный вариант состоит из 26 заданий, каждое из которых может быть отнесено к одному из трёх модулей: «Реальная математика», «Алгебра», «Геометрия». Вариант экзаменационной работы содержит как задания базового уровня (с кратким ответом), так и задания повышенного и высокого уровней сложности (задания с развёрнутым решением). Все задания модуля «Реальная математика» являются заданиями базового уровня.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть пособия содержит описание типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач (именно на его основе формируются варианты экзаменационной работы), методические рекомендации и примеры решения задач модуля «Алгебра» открытого банка. Наряду с методическими рекомендациями и большим числом разобранных примеров она включает в себя 22 тренинга из 10 задач каждый: по два тренинга к каждому из заданий 1—8 и 21—23, составляющих модуль «Алгебра» ОГЭ по математике, для отработки навыков их решения.

При самостоятельной работе с пособием следует сначала прочитать методические рекомендации к соответствующему заданию ОГЭ, затем попытаться выполнить подготовительные задания (они составляют первый тренинг) и понять, какие задачи решены неправильно. Повторив теоретический материал и ещё раз обратившись при необходимости к методическим рекомендациям, следует выполнить зачётные задания (они составляют второй тренинг). Отметим, что задания в пособии подобраны так, чтобы познакомить читателя со всем спектром задач соответствующего модуля открытого банка ОГЭ по математике и по окончании работы с пособием чувствовать себя на экзамене уверенно и спокойно.

Надеемся, что пособие окажется полезным как выпускникам основной школы, так учителям и методистам, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Пособие может быть использовано для организации итогового повторения (в том числе, с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену в 9 классе.

Авторы глубоко признательны и благодарны О. А. Васильевой за внимательное и вдумчивое чтение рукописи, замечания и предложения, в значительной степени способствовавшие улучшению пособия.

Задание 1

Краткие методические рекомендации

Задание 1 ОГЭ по математике представляет собой задачу на арифметические действия с дробями — как десятичными, так и обыкновенными. Статистика решения подобных задач на ОГЭ по математике является удручающей, поэтому таким задачам надо уделить самое пристальное внимание, отработав с учащимися как действия с десятичными дробями, так — и особенно! — действия с обыкновенными дробями и комбинациями десятичных и обыкновенных дробей.

В случае обыкновенных дробей стандартный рецепт один — приведение дробей к общему знаменателю, если знаменатели различны. Наиболее простой случай — когда знаменатели одной или двух дробей являются делителями знаменателя другой.

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{2}{15}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\frac{2}{15}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{2-3\cdot 3+2\cdot 5}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Ответ. 0,2.

В более сложных случаях общий знаменатель находится как произведение знаменателей данных дробей.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{5}{8}+\frac{7}{25}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{25}=\frac{5\cdot 25}{8\cdot 25}+\frac{7\cdot 8}{8\cdot 25}=\frac{125+56}{200}=\frac{181}{200}=0{,}905.$$

Ответ. 0,905.

Если тема усвоена достаточно хорошо, лучше не просто находить произведение знаменателей данных дробей, а выбирать в качестве общего знаменателя их наименьшее общее кратное, когда это возможно.

Пример 3. Найдите значение выражения $\left(\frac{17}{28}-\frac{11}{21}\right)\cdot 30$.

Решение. Заметим, что $28=7\cdot 4$, а $21=7\cdot 3$. Поэтому в качестве общего знаменателя дробей можно выбрать $7\cdot 4\cdot 3=84$. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\left(\frac{17}{28}-\frac{11}{21}\right)\cdot 30=\left(\frac{17\cdot 3}{84}-\frac{11\cdot 4}{84}\right)=\frac{7}{84}\cdot 30=\frac{1}{12}\cdot 30=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Ответ. 2,5.

Пример 4. Найдите значение выражения $\left(1\frac{7}{8}-1\frac{2}{3}\right)\cdot 48$.

Решение. Обратим дроби в скобках в неправильные, приведём их к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\left(1\frac{7}{8}-1\frac{2}{3}\right)\cdot 48=\left(\frac{15}{8}-\frac{5}{3}\right)\cdot 48=\frac{45-40}{24}\cdot 48=10.$$

Ответ. 10.

В некоторых случаях при решении подобных задач бывает удобно выполнить действия, используя распределительные свойства. Например, при решении предыдущего примера после обращения дробей в скобках в неправильные можно было сначала умножить каждое из полученных в скобках слагаемых на 48. Рассмотрим ещё один пример.

Пример 5. Найдите значение выражения $18\frac{18}{19}:\frac{18}{19}$.

Решение. Имеем

$$18\frac{18}{19}:\frac{18}{19}=\left(18+\frac{18}{19}\right):\frac{18}{19}=18:\frac{18}{19}+\frac{18}{19}:\frac{18}{19}=19+1=20.$$

Ответ. 20.

Иногда можно использовать навыки рационального счёта, например, не выполняя умножение двухзначных или трёхзначных чисел, поскольку на одно из них в конце решения удаётся сократить дробь.

Пример 6. Найдите значение выражения $15\frac{15}{17}:\frac{15}{17}$.

Решение. Пример можно решить, обратив первую дробь в неправильную:

$$15\frac{15}{17}:\frac{15}{17}=\frac{15\cdot 17+15}{17}:\frac{15}{17}=\frac{15\cdot 18}{17}:\frac{15}{17}=\frac{15\cdot 18}{17}\cdot\frac{17}{15}=18.$$

Разумеется, предыдущий пример можно было решить и аналогично примеру 5:

$$15\frac{15}{17}:\frac{15}{17}=\left(15+\frac{15}{17}\right):\frac{15}{17}=15:\frac{15}{17}+\frac{15}{17}:\frac{15}{17}=17+1=18.$$

Действия с конечными десятичными дробями обычно приводят к меньшему числу ошибок по сравнению с задачами на действия с обыкновенными дробями или комбинациями обыкновенных и смешанных дробей. Связано это, видимо, с тем, что конечные десятичные дроби как бы являются «по умолчанию» дробями «с общим знаменателем»: в самом сложном случае достаточно дописать необходимое количество нулей после запятой, чтобы получить дроби с одним и тем же числом знаков после запятой. Иногда вычисления удаётся рационализировать стандартными приёмами: вынесением за скобку общего множителя, применением формул сокращённого умножения, распределительных свойств и т. п.

Пример 7. Найдите значение выражения $0{,}987\cdot 999+0{,}987$.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель:

$$0{,}987\cdot 999+0{,}987=0{,}987(999+1)=0{,}987\cdot 1000=987.$$

Ответ. 987.

Пример 8. Найдите значение выражения $\dfrac{75^2-(0{,}75)^2}{75{,}75}$.

Решение. Применим к числителю данной дроби формулу разности квадратов:

$$\frac{75^2-(0{,}75)^2}{75{,}75}=\frac{(75-0{,}75)(75+0{,}75)}{75{,}75}=\frac{74{,}25\cdot 75{,}75}{75{,}75}=74{,}25.$$

Ответ. 74,25.

Задания, в которых встречаются как десятичные, так и обыкновенные дроби, вызывают порой значительные затруднения у части школьников. Если знаменатели всех дробей в условии являются степенями двойки и пятёрки или произведением таких степеней, дроби лучше обратить в конечные десятичные. Если хотя бы один из знаменателей дробей отличен от степеней двойки и пятёрки или произведения таких степеней, дроби лучше обратить в обыкновенные. Рассмотрим примеры.

Пример 9. Обратите $\dfrac{3}{40}$ в десятичную дробь.

Решение. Заметим, что $40=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$. Поэтому для того, чтобы обратить данную обыкновенную дробь в конечную десятичную, можно либо выполнить деление числителя дроби на её знаменатель столбиком, либо записать её в виде дроби со знаменателем, являющимся степенью числа 10. Для этого достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на 25. Получим

$$\frac{3}{40}=\frac{3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}=\frac{3\cdot 25}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5}=\frac{75}{1000}=0{,}075.$$

Ответ. 0,075.

Пример 10. Обратите 2,34 в обыкновенную дробь.

Решение. Имеем $2{,}34=2\dfrac{34}{100}=2\dfrac{17}{50}$.

Ответ. $2\dfrac{17}{50}$.

Пример 11. Найдите значение выражения $\left(12{,}5-6\dfrac{2}{3}\right)\cdot 19{,}2$.

Решение. Обратим все дроби в неправильные обыкновенные дроби и раскроем скобки (в данном случае это наиболее рациональный способ):

$$\left(12{,}5-6\frac{2}{3}\right)\cdot 19{,}2=\left(\frac{25}{2}-\frac{20}{3}\right)\cdot\frac{96}{5}=\frac{25}{2}\cdot\frac{96}{5}-\frac{20}{3}\cdot\frac{96}{5}=$$
$$=\frac{25}{5}\cdot\frac{96}{2}-\frac{20}{5}\cdot\frac{96}{3}=5\cdot 48-4\cdot 32=112.$$

Ответ. 112.

Отметим, что если рациональный способ вычислений не очевиден, то не надо тратить время на его поиск, а следует решить задачу стандартным образом.

Пример 12. Найдите значение выражения $29:\left(11\frac{29}{45}-5{,}2\right)$.

Решение. Преобразуем выражение в скобках, приведя дроби к общему знаменателю, а затем выполним действия:

$$29:\left(11\frac{29}{45}-5{,}2\right)=29:\left(11\frac{29}{45}-5\frac{9}{45}\right)=29:6\frac{20}{45}=29:6\frac{4}{9}=$$
$$=29:\frac{58}{9}=29\cdot\frac{9}{58}=\frac{9}{2}=4{,}5.$$

Ответ. 4,5.

Подготовительные задачи

1. Найдите значение выражения $7{,}9+2{,}2$.

2. Найдите значение выражения $6{,}4-4{,}8$.

3. Найдите значение выражения $9{,}9\cdot 7{,}1$.

4. Найдите значение выражения $\frac{4{,}8}{0{,}4}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{1}{2}+\frac{33}{50}$.

6. Найдите значение выражения $\frac{1}{25}-\frac{7}{50}$.

7. Найдите значение выражения $\frac{21}{5}\cdot\frac{3}{7}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{6}{5}:\frac{4}{11}$.

9. Найдите значение выражения $-12\cdot(-8{,}6\Big)-9{,}4$.

10. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{13}-2\frac{3}{4}\right)\cdot 26$.

Зачётные задачи

1. Найдите значение выражения $\dfrac{7{,}2-6{,}1}{2{,}2}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{1{,}2}{6{,}7-7{,}3}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{9}{4{,}5\cdot 2{,}5}$.

4. Найдите значение выражения $0{,}9\cdot(-10)^2-120$.

5. Найдите значение выражения $(6\cdot 10^2)^3\cdot(13\cdot 10^{-5})$.

6. Найдите значение выражения $(2\cdot 10^2)^4\cdot(19\cdot 10^{-6})$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\frac{1}{72}-\frac{1}{99}}$.

8. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}\right)\cdot 3$.

9. Найдите значение выражения $\left(1\dfrac{11}{16}-3\dfrac{7}{8}\right)\cdot 4$.

10. Найдите значение выражения $9\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^2-19\cdot\dfrac{1}{9}$.

Задание 2

Краткие методические рекомендации

Задание 2 ОГЭ по математике представляет собой задачу на взаимное расположение чисел на числовой (координатной) прямой, их сравнение и оценку. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 1. На координатной прямой точки A, B, C, D соответствуют числам 0,0137, 0,103, 0,03, 0,021.

Какой точке соответствует число 0,021?

1) A 2) B 3) C 4) D

Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно расположить данные числа в порядке возрастания, что для конечных десятичных дробей сделать совсем не сложно: $0{,}0137 < 0{,}021 < 0{,}03 < 0{,}103$. Следовательно, числу 0,021 соответствует точка B, и правильным ответом является 2.

Ответ. 2.

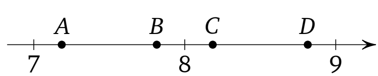
Пример 2. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{3}{11}$?

1) [0,1; 0,2] 2) [0,2; 0,3] 3) [0,3; 0,4] 4) [0,4; 0,5]

Решение. Ясно, что $\frac{3}{11} < \frac{3}{10} = 0{,}3$. Поэтому третий и четвёртый варианты ответов отпадают. Сравним $\frac{3}{11} = \frac{15}{55}$ и $0{,}2 = \frac{1}{5} = \frac{11}{55}$. Поскольку $\frac{15}{55} > \frac{11}{55}$, получаем, что $\frac{3}{11} > 0{,}2$. Следовательно, правильным ответом является 2.

Ответ. 2.

Пример 3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{67}$. Какая это точка?



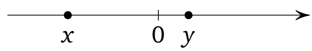
1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно установить, между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{67}$. Ясно, что $64 < 67 < 81$, откуда $8 < \sqrt{67} < 9$. Значит, одна из точек C или D является искомой. Кроме того, очевидно, что число 67 расположено значительно ближе к числу 64, чем к числу 81. Поэтому и число $\sqrt{67}$ расположено ближе к числу 8, чем к числу 9. Значит, числу $\sqrt{67}$ соответствует точка C.

Ответ. 3.

В части таких задач не задано ни одно конкретное число и отвечать на вопрос задачи приходится исходя из взаимного расположения точек на числовой прямой и пользуясь свойствами числовых неравенств.

Пример 4. На координатной прямой отмечены числа x и y.



Какое из приведённых утверждений для этих чисел **неверно**?

1) $xy^3 < 0$ 2) $x^4y > 0$ 3) $2x + y > 0$ 4) $x - 2y < 0$

Решение. Из условия задачи следует, что $x < 0$, $y > 0$ и $|x| > |y|$. Поэтому $xy^3 < 0$, $x^4y > 0$, $2x + y < 0$, $x - 2y < 0$. Значит, неверно утверждение 3.

Ответ. 3.

Подготовительные задачи

1. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{3}{7}$?

1) [0,1; 0,2] 2) [0,2; 0,3] 3) [0,3; 0,4] 4) [0,4; 0,5]

2. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{2}{17}$ и $\frac{4}{19}$?

1) 0 2) 0,1 3) 0,2 4) 0,3

3. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{4}{11}$ и $\frac{7}{17}$?

1) 0,1 2) 0,2 3) 0,3 4) 0,4

4. Какое из данных чисел принадлежит промежутку [6; 7]?

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{40}$ 4) $\sqrt{51}$

5. Между какими числами заключено число $\sqrt{60}$?

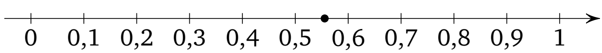
1) 20 и 22 2) 7 и 8 3) 59 и 61 4) 3 и 4

6. На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам 0,0256; 0,115; 0,04; 0,033.

Какой точке соответствует число 0,04?

1) A 2) B 3) C 4) D

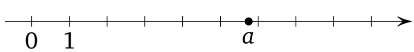
7. Одно из чисел $\frac{5}{9}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{9}$; $\frac{14}{9}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\frac{5}{9}$ 2) $\frac{11}{9}$ 3) $\frac{13}{9}$ 4) $\frac{14}{9}$

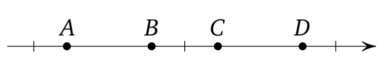
8. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $8 - a < 0$ 2) $a - 5 < 0$ 3) $8 - a > 0$ 4) $a - 6 > 0$

9. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{85}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

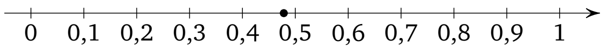
10. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.

Какая из разностей $a-b$, $a-c$, $c-b$ отрицательна?

1) $a-b$
3) $c-b$
2) $a-c$
4) ни одна из них

Зачётные задачи

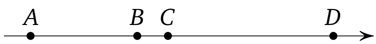
1. Одно из чисел $\frac{6}{23}$; $\frac{7}{23}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{12}{23}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\frac{6}{23}$ 2) $\frac{7}{23}$ 3) $\frac{11}{23}$ 4) $\frac{12}{23}$

2. На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам 0,1032; −0,031; −0,01; −0,104.



Какой точке соответствует число −0,031?

1) A 2) B 3) C 4) D

3. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{15}{11}$ и $\frac{13}{9}$?

1) 1,4 2) 1,5 3) 1,6 4) 1,7

4. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{5}{7}$?

1) [0,5; 0,6] 2) [0,6; 0,7] 3) [0,7; 0,8] 4) [0,8; 0,9]

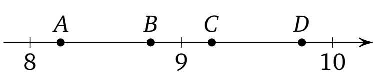
5. Между какими числами заключено число $\sqrt{59}$?

1) 7 и 8 2) 29 и 30 3) 58 и 60 4) 3 и 4

6. Какое из данных чисел принадлежит промежутку [7; 8]?

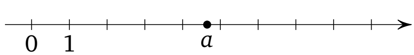
1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{45}$ 4) $\sqrt{60}$

7. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{96}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

8. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

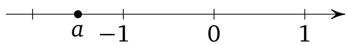
1) $5-a<0$ 2) $a-6>0$ 3) $a-5<0$ 4) $4-a>0$

9. На координатной прямой отмечены числа p, q и r.

Какая из разностей $q-p$, $q-r$, $r-p$ отрицательна?

1) $q-p$
2) $q-r$
3) $r-p$
4) ни одна из них

10. На координатной прямой отмечено число a.



Расположите в порядке возрастания числа $a-1$, $\frac{1}{a}$, a.

1) $a-1$, $\frac{1}{a}$, a 2) a, $\frac{1}{a}$, $a-1$ 3) $a-1$, a, $\frac{1}{a}$ 4) a, $a-1$, $\frac{1}{a}$

Задание 3

Краткие методические рекомендации

Задание 3 ОГЭ по математике продолжает линию заданий 1 и 2 и является задачей на преобразование числовых и буквенных выражений и вычисление их значений. При этом задачи открытого банка по этой позиции варианта ОГЭ можно разделить на две чётко разграниченные группы: задачи на действия с целыми степенями и задачи на действия с корнями.

Операция возведения в натуральную степень вводится в школьном курсе математики, в сущности, как сокращённая запись умножения одинаковых чисел:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (\text{здесь } n \in \mathbb{N}).$$

Затем для всех $a \neq 0$ это определение распространяется на степени с целым отрицательным показателем: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ и нулевую степень: $a^0 = 1$. Напомним основные свойства целых степеней.

• Произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

• Произведение и частное степеней с одинаковыми показателями:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

• Возведение степени в степень: $(a^n)^m = a^{nm}$.

При решении задач на действия со степенями обычно достаточно применить одно из двух следующих правил:

• привести степени к одному основанию,

• привести степени к одному показателю.

Пример 1. Найдите значение выражения $7^{14} : 49^6$.

Решение. Приведём степени к одному основанию и воспользуемся свойствами степеней:

$$7^{14} : 49^6 = 7^{14} : (7^2)^6 = 7^{14} : 7^{12} = 7^{14-12} = 7^2 = 49.$$

Ответ. 49.

Пример 2. Найдите значение выражения $\dfrac{4^6 \cdot 25^{12}}{50^{13}}$.

Решение. Сначала приведём степени в числителе к одному показателю, а затем приведём степени в числители и знаменателе к одному основанию и применим свойства степеней:

$$\frac{4^6\cdot 25^{12}}{50^{13}}=\frac{(2^2)^6\cdot 25^{12}}{50^{13}}=\frac{2^{12}\cdot 25^{12}}{50^{13}}=\frac{(2\cdot 25)^{12}}{50^{13}}=\frac{50^{12}}{50^{13}}=\frac{1}{50}=0{,}02.$$

Ответ. 0,02.

Пример 3. Найдите значение выражения $4^7\cdot 3^9:12^8$.

Решение. Приведём две первые степени к одному показателю:

$$4^7\cdot 3^9=4^7\cdot 3^7\cdot 3^2=(4\cdot 3)^7\cdot 3^2=12^7\cdot 9.$$

Разделив полученное выражение на 12^8, получим

$$\frac{12^7\cdot 9}{12^8}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Ответ. 0,75.

Пример 4. Найдите значение выражения $3^{-17}:21^{-19}\cdot 7^{-18}$.

Решение. Перепишем данное выражение в виде $\dfrac{3^{-17}\cdot 7^{-18}}{21^{-19}}$ и воспользуемся свойствами степеней:

$$\frac{3^{-17}\cdot 7^{-18}}{21^{-19}}=\frac{3^{-17}\cdot 7^{-18}}{3^{-19}\cdot 7^{-19}}=3^{-17+19}\cdot 7^{-18+19}=3^2\cdot 7=63.$$

Ответ. 63.

При преобразовании сумм, в которых слагаемыми являются степени некоторого числа, бывает удобно вынести за скобки степень с наименьшим показателем.

Пример 5. Найдите значение выражения

$$\frac{2+17\cdot 2^{-3}-3}{2+3\cdot 5^{-2}-256\cdot 5^{-3}}.$$

Решение. В числителе степень с наименьшим показателем — это 2^{-3}, а в знаменателе — 5^{-3}. Вынесем эти степени за скобки:

$$\frac{2+17\cdot 2^{-3}-3}{2+3\cdot 5^{-2}-256\cdot 5^{-3}}=\frac{2^{-3}(2^4+17-3\cdot 2^3)}{5^{-3}(2\cdot 5^3+3\cdot 5-256)}=\frac{2^{-3}(16+17-24)}{5^{-2}(250+15-256)}.$$

Выполнив действия с целыми числами, а затем со степенями, получим

$$\frac{2^{-3}\cdot 9}{5^{-3}\cdot 9}=\frac{2^{-3}}{5^{-3}}=\frac{5^3}{2^3}=\frac{125}{8}=15{,}625.$$

Ответ. 15,625.

Напомним теперь определение и основные свойства корня степени n.

Определение. Алгебраическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a. Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется такое *неотрицательное* число b, n-я степень которого равна a.

Обозначается корень степени n так: $\sqrt[n]{a}$. Знак «$\sqrt[n]{}$» называется радикалом, n — показателем степени корня. Корень второй степени называется квадратным, при его обозначении степень корня не указывается: пишут $\sqrt{a}$, а не $\sqrt[2]{a}$. Корень третьей степени называется кубическим корнем и обозначается стандартным образом: $\sqrt[3]{a}$. Подавляющее большинство иррациональных выражений школьного курса математики связано именно с квадратными и (реже) кубическими корнями. Алгебраическое выражение $a(x)$ под знаком корня в записи вида $\sqrt[n]{a(x)}$ называется подкоренным выражением.

Замечание 1. Для записи алгебраического и арифметического корня используется один и тот же символ. Понятие арифметического корня вводится для того, чтобы сделать однозначным определение корня чётной степени: ведь чётные степени двух противоположных чисел одинаковы, и, если при извлечении корня чётной степени не оговаривать, какое из них имеется в виду, это приведёт к различного рода противоречиям. Тем самым, когда говорят и пишут о корне чётной степени из числа, всегда (если не оговорено противное) имеют в виду арифметический корень, который по определению является неотрицательным числом. Для корней нечётной степени обычно используют определение алгебраического корня. Таким образом, *корень любой степени из неотрицательного числа является неотрицательным числом, корень нечётной степени из отрицательного числа является отрицательным числом*.

Замечание 2. Краткое определение арифметического корня чётной степени можно записать так:

$$\sqrt[2n]{a} = b \iff \begin{cases} a = b^{2n}, \\ b \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{(здесь } n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда следует, что арифметический корень определён только для неотрицательных чисел. В самом деле, по определению $b \geqslant 0$, но $a = b^{2n}$, и, значит, $a \geqslant 0$. Поэтому область допустимых значений корня чётной степени $\sqrt[2n]{a(x)}$ находится из условия $a(x) \geqslant 0$ неотрицательности подкоренного выражения. Область определения корня нечётной степени $\sqrt[2n+1]{a(x)}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$) такого ограничения не предполагает: он определён при любом значении переменной, для которого имеет смысл выражение $a(x)$.

Укажем основные свойства арифметического корня (n и k — натуральные числа, бо́льшие 1, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$):

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$;	4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;
2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;	5) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;
3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;	6) $\sqrt[n]{a^l} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^l$ (если $l \leqslant 0$, то $a \neq 0$);
	7) если $a < b$, то и $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Замечание 3. Если n и k — нечётные натуральные числа, бо́льшие 1, то приведённые свойства справедливы и для отрицательных a и b. Для корня нечётной степени укажем ещё одно полезное свойство: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ (знак «минус» можно «выносить» за знак корня нечётной степени и «вносить» под знак такого корня).

Замечание 4. При внесении множителя под знак корня чётной степени знак «минус» под корень не вносится, а остаётся перед корнем. При преобразовании числовых выражений проблем обычно нет: $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$, а вот при преобразовании буквенных встречаются ошибки. Так, например, если число a отрицательно, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Пример 6. Найдите значение выражения $\sqrt{229^2 - 60^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{229^2 - 60^2} = \sqrt{(229-60)(229+60)} = \sqrt{169 \cdot 289} = 13 \cdot 17 = 221.$$

Ответ. 221.

Пример 7. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3{,}4} \cdot \sqrt{11{,}9}}{\sqrt{0{,}14}}$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, воспользовавшись свойствами корня, а затем выполним необходимые преобразования:

$$\frac{\sqrt{3{,}4} \cdot \sqrt{11{,}9}}{\sqrt{0{,}14}} = \sqrt{\frac{3{,}4 \cdot 11{,}9}{0{,}14}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 119}{14}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 119}{2 \cdot 7}} = \sqrt{17 \cdot 17} = 17.$$

Ответ. 17.

Подготовительные задачи

1. Какое из данных ниже выражений при любых значениях n равно дроби $\frac{7^n}{49}$?

1) $7^{\frac{n}{2}}$ 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ 3) 7^{n-2} 4) 7^n-7^2

2. Какое из данных ниже выражений при любых значениях k равно степени 3^{k-2}?

1) $(3^k)^{-2}$ 2) 3^k-3^2 3) $\frac{3^k}{3^2}$ 4) -6^k

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\left(5\sqrt{3}\right)^2$?

1) 45 2) 75 3) 15 4) 225

4. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\sqrt{5\cdot 18}\cdot\sqrt{30}$?

1) $30\sqrt{15}$ 2) $30\sqrt{3}$ 3) 90 4) $30\sqrt{6}$

5. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{20}{(4\sqrt{5})^2}$?

1) 1 2) $\frac{1}{20}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{1}{4}$

6. Какое из чисел $\sqrt{810}$, $\sqrt{8{,}1}$, $\sqrt{0{,}81}$ является рациональным?

1) $\sqrt{810}$ 3) $\sqrt{0{,}81}$

2) $\sqrt{8{,}1}$ 4) все эти числа иррациональны

7. Какое из чисел $\sqrt{64}$, $\sqrt{0{,}64}$, $\sqrt{6400}$ является иррациональным?

1) $\sqrt{64}$ 3) $\sqrt{6400}$

2) $\sqrt{0{,}64}$ 4) все эти числа рациональны

8. Значение какого из данных ниже выражений является иррациональным числом?

1) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$

2) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{4}\right)\cdot\left(\sqrt{20}+\sqrt{4}\right)$ 4) $\sqrt{54}+2\sqrt{6}$

9. Какое из данных ниже чисел является наибольшим?

1) $5\sqrt{3}$ 2) 9,5 3) $2\sqrt{22}$ 4) $3\sqrt{10}$

10. Какое из данных ниже чисел является наименьшим?

1) $\sqrt{19}$ 2) $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{2}}$ 3) $2\sqrt{5}$ 4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

Зачётные задачи

1. Какое из данных ниже выражений при любых значениях n равно произведению $27 \cdot 3^n$?

1) 3^{n+3} 2) 3^{3n} 3) 81^n 4) 27^{n+1}

2. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{3^{-12}}{3^{-9} \cdot 3^{-8}}$?

1) $-\frac{1}{243}$ 2) $-\frac{1}{243}$ 3) 243 4) -243

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$?

1) 2 2) $2\sqrt{7}$ 3) 14 4) $4\sqrt{7}$

4. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{24}{(4\sqrt{10})^2}$?

1) $\frac{3}{20}$ 2) $\frac{3}{10}$ 3) $\frac{2}{5}$ 4) $\frac{3}{4}$

5. Значение какого из данных ниже выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{7}$ 3) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}$

2) $\left(\sqrt{9} - \sqrt{14}\right) \cdot \left(\sqrt{9} + \sqrt{14}\right)$ 4) $\sqrt{54} + 3\sqrt{6}$

6. Какое из чисел $\sqrt{8{,}1}$, $\sqrt{810}$, $\sqrt{8100}$ является рациональным?

1) $\sqrt{8{,}1}$ 3) $\sqrt{8100}$

2) $\sqrt{810}$ 4) все эти числа иррациональны

7. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\left(\sqrt{67} - 3\right)^2$?

1) $58 - 6\sqrt{67}$ 3) $76 - 6\sqrt{67}$

2) 58 4) $76 - 3\sqrt{67}$

8. Какое из данных ниже чисел является наименьшим?

1) $\sqrt{17}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $\frac{\sqrt{38}}{\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

9. Какое из данных ниже чисел является наименьшим?

1) $\sqrt{23}$ 2) $2\sqrt{7}$ 3) $\left(\sqrt{5}\right)^2$ 4) $\dfrac{\sqrt{44}}{\sqrt{2}}$

10. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{55\cdot 65}}{\sqrt{13\cdot 11}}$.

Задание 4

Краткие методические рекомендации

Задание 4 ОГЭ по математике представляет собой несложное рациональное уравнение — линейное или квадратное либо сводящееся в одно-два действия к одному из них целое или дробно-линейные уравнение. Квадратные уравнения представлены в открытом банке ОГЭ по математике всеми типами: неполные (с нулевым вторым или третьим коэффициентом) и полные (приведённые и неприведённые). Для того чтобы успешно справиться с подобным заданием на ОГЭ, достаточно уметь решать линейные и квадратные уравнения, помнить правило переноса слагаемого из одной части уравнения в другую (знак этого слагаемого меняется на противоположный), обладать определёнными вычислительными навыками, связанными с арифметическими действиями над целыми числами и дробями.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{4}{9}x=8\frac{4}{9}$.

Решение. Сначала обратим дробь в правой части уравнения в неправильную: $8\frac{4}{9}=\frac{76}{9}$. Разделим обе части уравнения на число $\frac{4}{9}$. Получим $x=\frac{76}{9}:\frac{4}{9}$, откуда $x=\frac{76}{9}\cdot\frac{9}{4}$, и, значит, $x=19$.

Ответ. 19.

Решение квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ обычно основывается на формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

корней квадратного уравнения. Напомним, что выражение b^2-4ac называется дискриминантом квадратного уравнения и обозначается буквой D. Может также применяться формула для чётного второго коэффициента: если b — чётное число, т. е. $b=2b_1$, то

$$x=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2},\quad \text{откуда}\quad x=\frac{-2b_1\pm2\sqrt{b_1^2-ac}}{2a},$$

т. е.

$$x=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a},\quad \text{или}\quad x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}.$$

Пример 2. Решите уравнение $2x^2-17x-9=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Вычислим дискриминант уравнения:

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 361.$$

В формуле корней квадратного уравнения меньшему корню соответствует знак «минус» перед квадратным корнем из дискриминанта. Значит, искомый корень $x = \frac{17 - \sqrt{361}}{4} = \frac{17 - 19}{4}$, откуда $x = -0{,}5$.

Ответ. $-0{,}5$.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корнями которого являются числа x_1 и x_2. Тогда справедливы формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Эти формулы обычно используются применительно к приведённому квадратному уравнению, т. е. к уравнению, старший коэффициент левой части которого равен 1. Тем не менее, формулы Виета можно использовать и для вычисления корней неприведённого квадратного уравнения. Если умножить обе части первого уравнения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

на a, а обе части второго уравнения на a^2, получим систему, которую можно записать так:

$$\begin{cases} (ax_1) + (ax_2) = -b, \\ (ax_1)(ax_2) = ac. \end{cases}$$

Таким образом, если найти два числа, произведение которых равно ac, а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2, после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного уравнения. При определённом навыке такие вычисления легко проводятся устно: на «роль» ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac, и, перебирая «по возрастанию» возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ.

Пример 3. Решите уравнение $9x^2 - 73x + 8 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $9 \cdot 8 = 72$, а сумма равна 73. Уже простейший делитель числа 72 позволяет получить ответ: $1 \cdot 72 = 72$, $1 + 72 = 73$. Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни данного уравнения: $\frac{1}{9}$ и $\frac{72}{9} = 8$.

Ответ. 8.

Пример 4. Решите уравнение $4x^2 - 15x + 9 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Сначала найдём два числа, произведение которых равно $4 \cdot 9 = 36$, а сумма равна 15. Перебирая пары делителей числа 36 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем шаге находим искомые числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 4, получим корни данного уравнения: $\frac{3}{4} = 0{,}75$ и $\frac{12}{4} = 3$.

Ответ. 0,75.

Пример 5. Решите уравнение $6x^2 + 5x - 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение. Для вычисления корней уравнения найдём два числа, произведение которых равно $6 \cdot (-4) = -24$, а сумма равна -5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 24 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24, 2 и -12, … На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -5: это 3 и -8. Разделив каждое из этих чисел на 6, найдём корни данного уравнения: $\frac{3}{6} = 0{,}5$ и $\frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$.

Ответ. 0,5.

Для решения простейших дробно-рациональных уравнений достаточно уметь выполнять действия с алгебраическими дробями. Одни из таких уравнений после несложных преобразований сводятся к линейным, другие — к квадратным. Отметим, что дробно-рациональные уравнения, сводимые к квадратным, относятся к более сложным и в банке задач задания 4 не представлены.

Пример 6. Решите уравнение $\frac{x-5}{x+2} = 2$.

Решение. Заметим, что $x \neq -2$. Умножив обе части уравнения на $x + 2$, получим $x - 5 = 2(x + 2)$, откуда $x - 5 = 2x + 4$, и $x = -9$.

Ответ. -9.

Подготовительные задачи

1. Найдите корень уравнения $6x+1=-4x$.

2. Найдите корень уравнения $-4+7x=8x+1$.

3. Найдите корень уравнения $5(x+9)=-8$.

4. Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{12}=\frac{11}{3}$.

5. Найдите корень уравнения $\frac{12}{x+5}=-\frac{12}{5}$.

6. Решите уравнение $(x+2)(-x+6)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

7. Решите уравнение $3x^2+18x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

8. Решите уравнение $x^2+18=9x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

9. Решите уравнение $2x^2-3x+1=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

10. Решите уравнение $2x^2+5x-7=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Зачётные задачи

1. Найдите корень уравнения $-4x-9=6x$.

2. Найдите корень уравнения $2+3x=-7x-5$.

3. Найдите корень уравнения $5(x+4)=-9$.

4. Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{12}=\frac{55}{12}$.

5. Найдите корень уравнения $\frac{6}{x+8}=-\frac{3}{4}$.

6. Решите уравнение $(x+20)(-x+10)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Решите уравнение $4x^2-20x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

8. Решите уравнение $x^2+3x=10$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

9. Решите уравнение $5x^2+4x-1=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

10. Решите уравнение $5x^2+8x+3=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Задание 5

Краткие методические рекомендации

Задания, связанные с функциями и их графиками (именно к ним относится задание 5 ОГЭ), ежегодно включаются в варианты ОГЭ по математике. По большей части это задания на чтение графиков функций, содержащие вопросы о свойствах функций, задания, в которых требуется установить соответствие между функциями, заданными формулами, и графиками этих функций, либо вариации последних, предполагающие ответ на вопрос, какая из нескольких данных формул задаёт функцию, график которой приведён в условии, или какой из нескольких данных графиков соответствует функции, заданной указанной в условии формулой.

Напомним, что графиком линейной функции является прямая, уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а для построения этой прямой достаточно задать координаты двух её точек.

Поскольку $y(0) = b$, прямая $y = kx + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (в силу чего коэффициент b называют начальной ординатой).

Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Если $k > 0$, линейная функция $y = kx + b$ является возрастающей на всей числовой прямой, принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{k}$ (рис. 1).

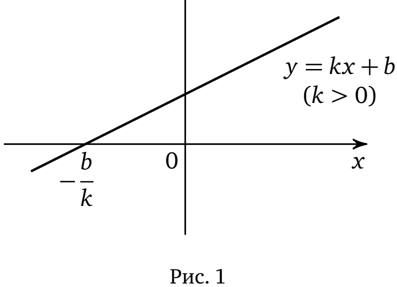


Рис. 1

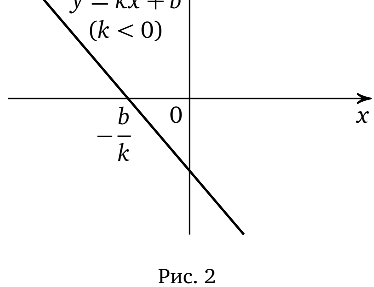


Рис. 2

В тех случаях, когда на рисунках не указан масштаб, считайте, что размер клетки равен 1×1.

Если $k<0$, линейная функция является убывающей на всей числовой прямой, принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{k}\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\dfrac{b}{k}; +\infty\right)$ и обращается в нуль при $x = -\dfrac{b}{k}$ (рис. 2).

Наконец, если $k=0$, то уравнение прямой $y=kx+b$ принимает вид $y=b$. Эта прямая, очевидно, параллельна оси абсцисс (поскольку ординаты всех её точек одинаковы) и пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (рис. 3).

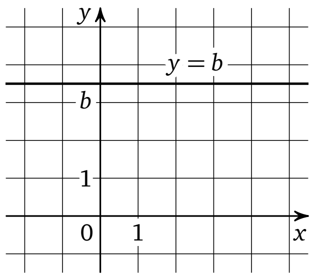


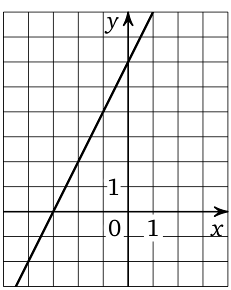
Рис. 3

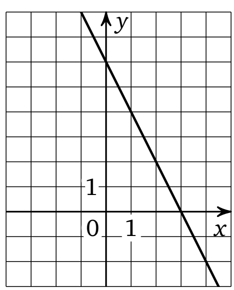
Пример 1. Установите соответствие между функциями и их графиками.

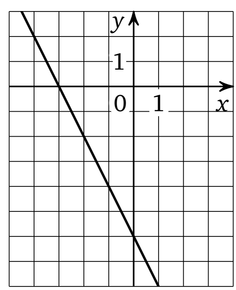
ФУНКЦИИ

А) $y=2x+6$ Б) $y=-2x-6$ В) $y=-2x+6$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

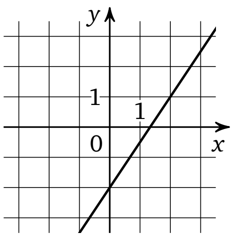
А	Б	В

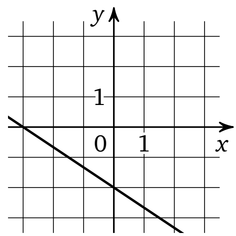
Решение. Единственная прямая, угловой коэффициент которой положителен, — это прямая А. Значит, этой прямой соответствует график 1. У прямой Б начальная ордината равна −6, а у прямой В начальная ордината равна 6. Значит, прямой Б соответствует график 3, а прямой В — график 2.

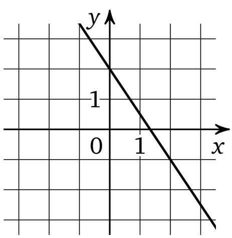
Ответ.

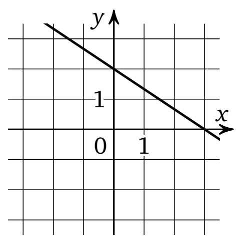
А	Б	В
1	3	2

Пример 2. На каком рисунке изображён график функции $y = 2 - \frac{2}{3}x$?

1)


3)


2)


4)


Решение. Если $x = 0$, то $y = 2$. Значит, прямая $y = 2 - \frac{2}{3}x$ пересекает ось ординат в точке с ординатой 2. Если $y = 0$, то $2 - \frac{2}{3}x = 0$, откуда $x = 3$. Значит, прямая $y = 2 - \frac{2}{3}x$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 3. Поэтому искомым графиком является 4.

Ответ. 4.

Напомним теперь, что функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ называется квадратичной.

Сначала рассмотрим случай $a > 0$. В этом случае графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса x_0 вершины параболы находится по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ и достигает своего наименьшего значения $y_0 = -\frac{D}{4a}$ в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс существенным образом связано со знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Если $D > 0$, график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; условимся, что здесь и далее x_1 — меньший корень, x_2 — больший корень этого уравнения, т. е. $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, а $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Таким образом, если $a > 0$ и $D > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, отрицательные значения — при всех $x \in (x_1; x_2)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 4).

Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0$, т. е. график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину параболы. Таким образом, если $a > 0$ и $D = 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения для всех $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а отрицательных значений не принимает (рис. 5).

Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен выше оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только положительные значения (рис. 6).

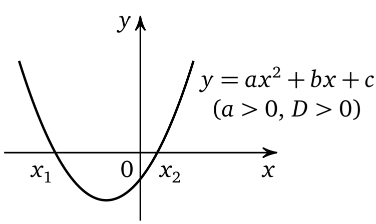


Рис. 4

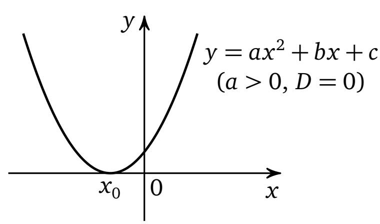


Рис. 5

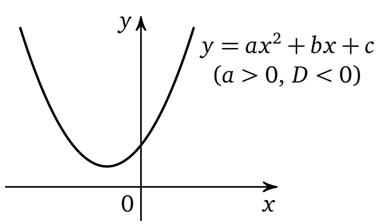


Рис. 6

Случай $a<0$ рассматривается аналогично. В этом случае графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Функция убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$, возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ и достигает наибольшего значения $y_0=-\frac{D}{4a}$ в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Если $D>0$, то график функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Таким образом, при $a<0$ и $D>0$ квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные значения для всех $x\in(x_1;x_2)$, отрицательные значения — для всех $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ и обращается в нуль в точках $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (рис. 7). Если $D=0$, график функции $y=ax^2+bx+c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину x_0 параболы. Таким образом, если $a<0$ и $D=0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает отрицательные значения для всех $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, а положительных значений не принимает (рис. 7). Если $D<0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y=ax^2+bx+c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен ниже оси абсцисс. Таким образом, если $a>0$ и $D<0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает только отрицательные значения (рис. 9).

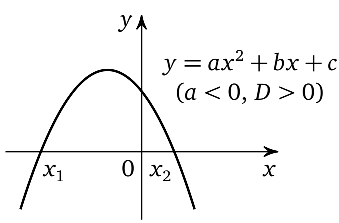


Рис. 7

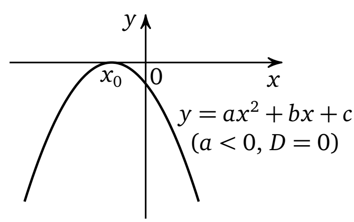


Рис. 8

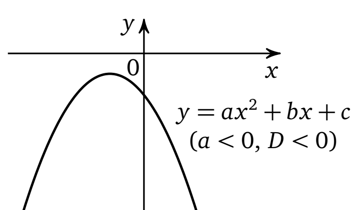
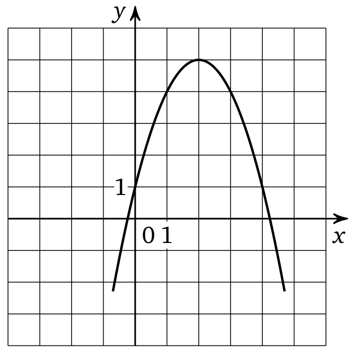


Рис. 9

Пример 3. На рисунке изображён график квадратичной функции.



а) Найдите значение функции при $x=1$.

б) Найдите значения x, при которых $y=4$.

в) Найдите наибольшее значение функции.

Решение. а) Для ответа на этот вопрос достаточно мысленно провести через точку 1 оси абсцисс прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересечёт параболу в точке с ординатой 4.

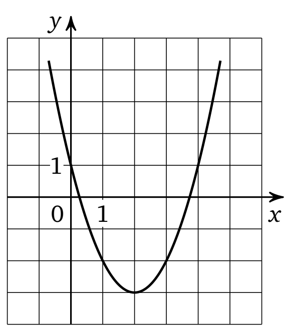
б) Для ответа на второй вопрос задания достаточно мысленно провести через точку 4 оси ординат прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечёт параболу в точках с абсциссами 1 и 3.

в) Наибольшему значению функции соответствует ордината вершины параболы. Эта ордината в данном случае равна 5.

Ответ. а) 4; б) 1; 3; в) 5.

Заметим, что типичной ошибкой при ответе на вопрос в) является запись в ответе абсциссы вершины, а не её ординаты. Следует акцентировать внимание учащихся на этом факте.

Пример 4. На рисунке изображён график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$.



а) Найдите значение коэффициента c.

б) Найдите значение коэффициента a.

в) Найдите значение коэффициента b.

г) Найдите значение функции при $x = -3$.

Решение. а) График квадратичной функции пересекает ось ординат в точке $(0; c)$, т. е. в точке с ординатой c. Поэтому $c = 1$.

б) и в) Из предыдущего следует, что $y = ax^2 + bx + 1$. Найдём оставшиеся коэффициенты, получив два уравнения с этими неизвестными коэффициентами. Получить эти уравнения можно, заметив, что точки $(1; -2)$ и $(2; -3)$ принадлежат параболе. Значит, $-2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1$ и $-3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1$, откуда $\begin{cases} a + b = -3, \\ 2a + b = -2. \end{cases}$ Вычтя почленно из второго уравнения системы её первое уравнение, найдём $a = 1$. Подставив это значение в первое уравнение системы, получим $b = -4$.

г) Ответить на последний вопрос задания по имеющемуся фрагменту графика невозможно, поскольку точка графика с абсциссой -3 на рисунке не изображена. Но теперь известна формула, задающая данную квадратичную функцию: $y = x^2 - 4x + 1$. Поэтому

$$y(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 1 = 22.$$

Ответ. а) 1; б) 1; в) -4; г) 22.

Графиком обратной пропорциональности, т. е. функции $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, является гипербола, ветви которой при $k > 0$ расположены в первой и третьей координатных четвертях (рис. 10), а при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях (рис. 11).

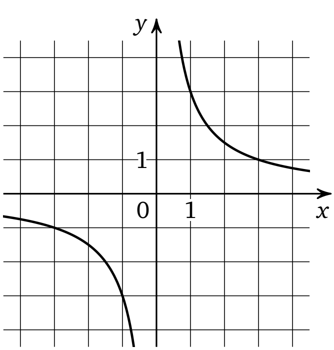


Рис. 10

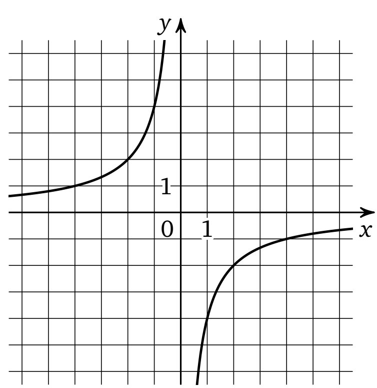


Рис. 11

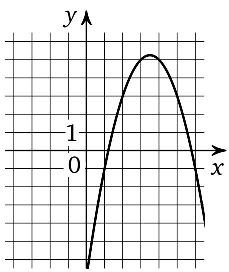
График обратной пропорциональности проходит через точку $(1; k)$. При $k>0$ функция $y=\frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ своей области определения; при $k<0$ — возрастает на каждом из этих промежутков. Отметим, что говорить о возрастании или убывании функции $y=\frac{k}{x}$ на всей области определения нельзя, это является математической ошибкой: ведь из того, что $2>-1$, не следует, что $y(2)<y(-1)$ при $k>0$ (см. рис. 10), и, значит, функция $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, хотя и убывает на каждом из них. Аналогично функция $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$ не является возрастающей на объединении промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, хотя и возрастает на каждом из них.

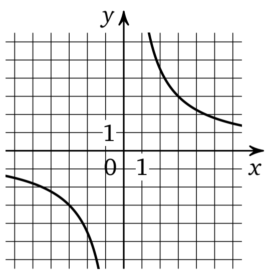
Пример 5. Установите соответствие между функциями и их графиками.

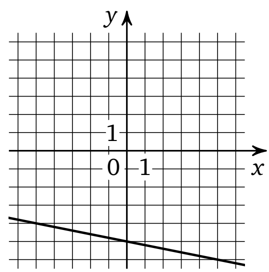
ФУНКЦИИ

А) $y=-\frac{1}{5}x-5$ Б) $y=-x^2+7x-7$ В) $y=\frac{9}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

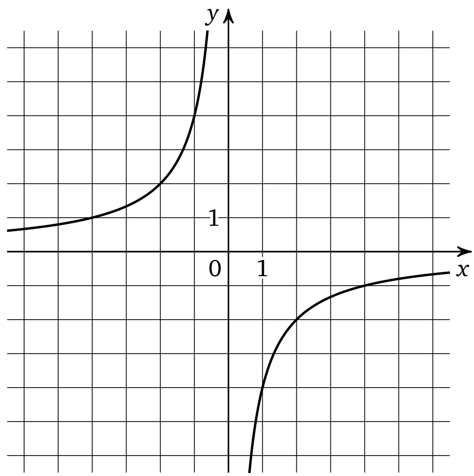
А	Б	В

Решение. Графиком функции А является прямая, графиком функции Б — парабола, графиком функции В — гипербола. На рисунке 1 изображена парабола, на рисунке 2 — гипербола, на рисунке 3 — прямая. Значит, формуле А соответствует график 3, формуле Б — график 1, формуле В — график 2.

Ответ.

А	Б	В
3	1	2

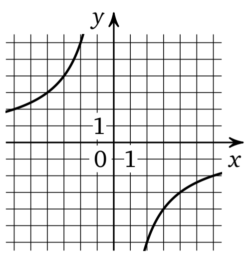
Пример 6. На рисунке изображён график функции $y=\frac{k}{x}$. Найдите k.

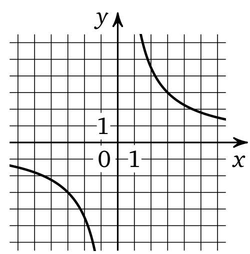


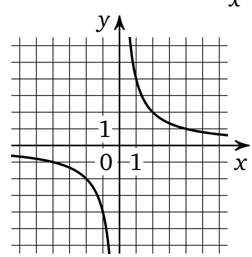
Решение. Для решения подобных задач достаточно найти на графике точку с целыми координатами. В данном случае одной из таких точек является, например, точка $(4; -1)$. Значит, $-1=\frac{k}{4}$, откуда $k=-4$.

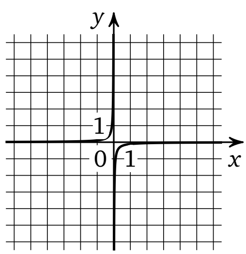
Ответ. -4.

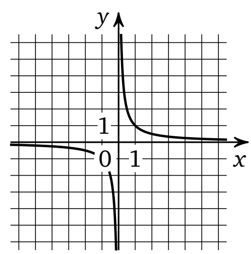
Пример 7. На рисунках изображены графики функций вида $y=\frac{k}{x}$.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

Определите, на каком из них изображена гипербола, у которой значение k:

а) наибольшее;

б) наименьшее;

в) наименьшее положительное;

г) наибольшее отрицательное;

д) наибольшее по модулю;

е) наименьшее по модулю.

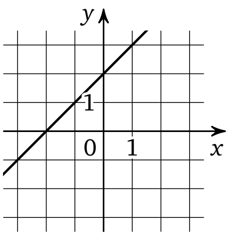
Решение. Поскольку график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $(1; k)$, достаточно сравнить ординаты точек с абсциссой 1, принадлежащих данным графикам. Наибольшая из ординат будет у точки $(1; k)$ графика 2, наименьшая — у точки $(1; k)$ графика 1. Наименьшая положительная ордината будет у точки $(1; k)$ графика 5, наибольшая отрицательная — у точки $(1; k)$ графика 4. Для ответа на вопрос д) достаточно сравнить графики, соответствующие наибольшему положительному значению k (график 2) и наименьшему отрицательному значению k (график 1). Графику 1 принадлежит, например, точка $(2; -6)$, откуда $-6=\frac{k}{2}$, и $k=-12$. Графику 2 принадлежит, например, точка $(3; 3)$, откуда $3=\frac{k}{3}$, и $k=9$. Поскольку $|-12|=12>9$, искомым графиком является график 1. Для ответа на вопрос е) вовсе не обязательно находить конкретные значения k: совершенно очевидно, что самая маленькая по модулю ордината будет у точки $(1; k)$ графика 4.

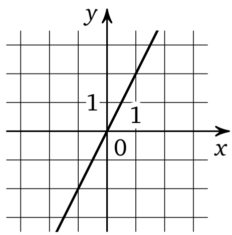
Ответ. а) 2; б) 1; в) 5; г) 4; д) 1; е) 4.

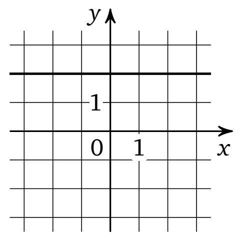
Подготовительные задачи

1. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

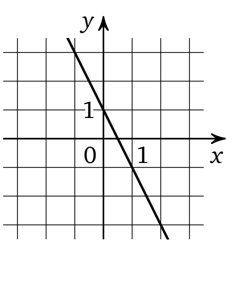
1) $y = 2x$ 2) $y = x + 2$ 3) $y = 2$

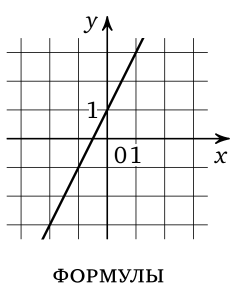
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

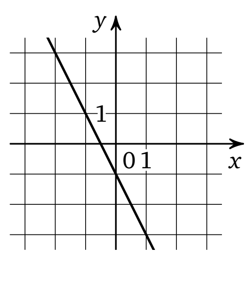
А	Б	В

2. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

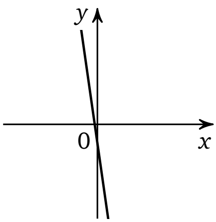
1) $y = -2x - 1$ 2) $y = -2x + 1$ 3) $y = 2x + 1$

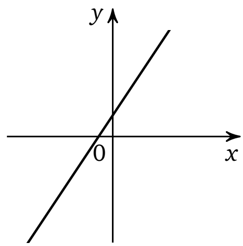
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

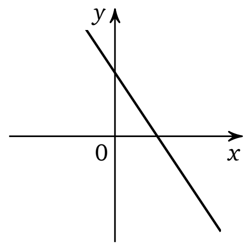
А	Б	В

3. На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k < 0$, $b < 0$ 2) $k < 0$, $b > 0$ 3) $k > 0$, $b > 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

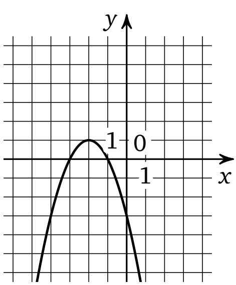
А	Б	В

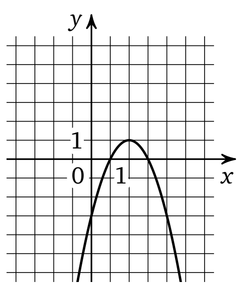
4. Установите соответствие между функциями и их графиками.

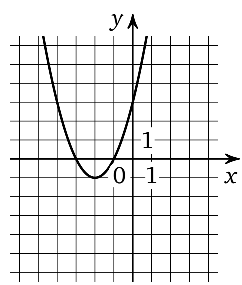
ФУНКЦИИ

А) $y = -x^2 - 4x - 3$ Б) $y = -x^2 + 4x - 3$ В) $y = x^2 + 4x + 3$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

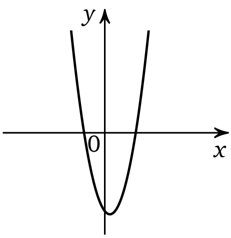
А	Б	В

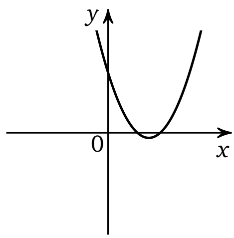
5. На рисунках изображены графики функций вида

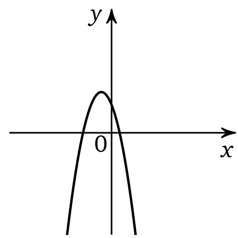
$$y = ax^2 + bx + c.$$

Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

КОЭФФИЦИЕНТЫ

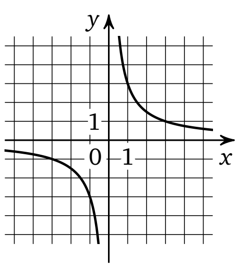
1) $a < 0$, $c > 0$ 2) $a > 0$, $c > 0$ 3) $a > 0$, $c < 0$

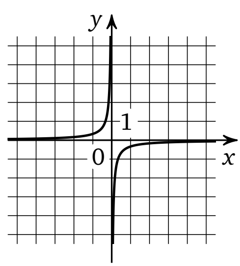
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

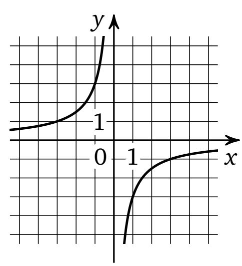
А	Б	В

6. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{1}{3x}$ 2) $y = \dfrac{3}{x}$ 3) $y = -\dfrac{3}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

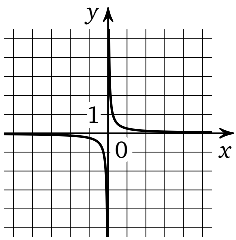
А	Б	В

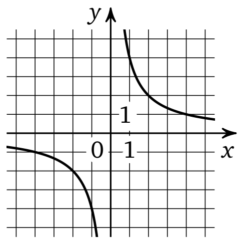
7. Установите соответствие между функциями и их графиками.

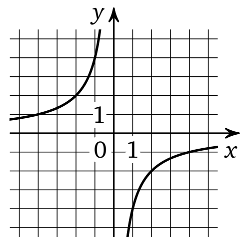
ФУНКЦИИ

А) $y=-\dfrac{4}{x}$ Б) $y=\dfrac{1}{4x}$ В) $y=\dfrac{4}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

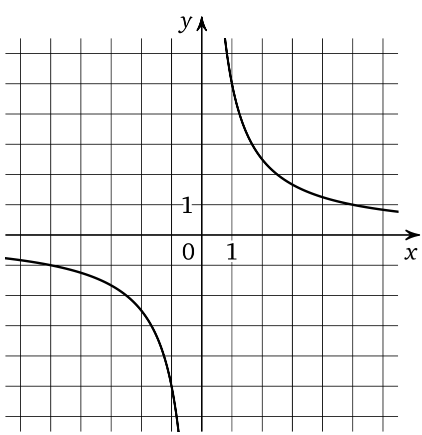
2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

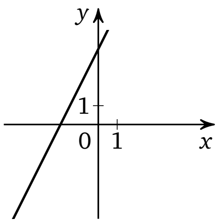
8. На рисунке изображён график функции $y=\dfrac{k}{x}$.

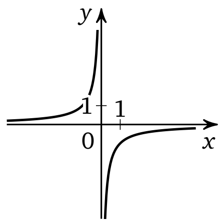


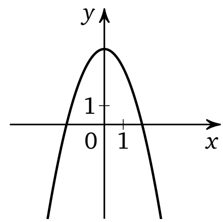
Определите значение коэффициента k.

9. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

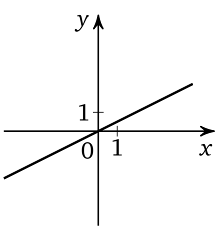
1) $y = -\frac{1}{x}$ 2) $y = 4 - x^2$ 3) $y = 2x + 4$

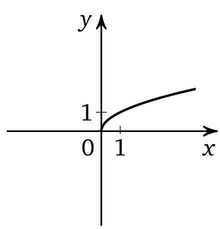
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

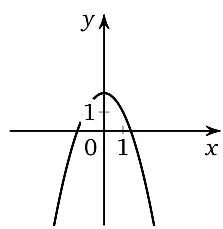
А	Б	В

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y = \frac{1}{2}x$ 2) $y = 2 - x^2$ 3) $y = \sqrt{x}$

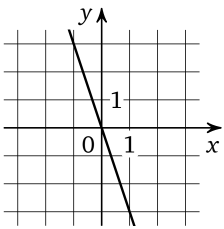
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

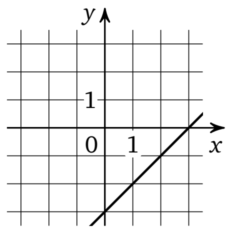
А	Б	В

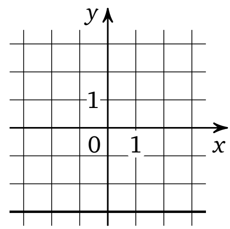
Зачётные задачи

1. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

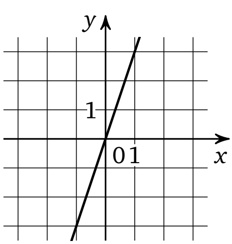
1) $y=-3$ 2) $y=x-3$ 3) $y=-3x$

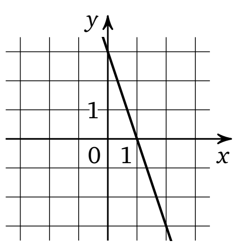
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

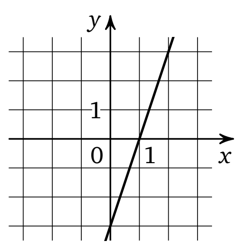
А	Б	В

2. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

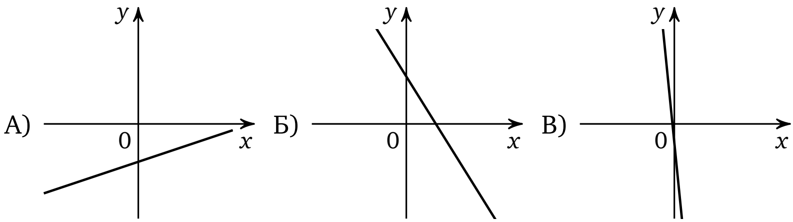
1) $y=-3x+3$ 2) $y=3x$ 3) $y=3x-3$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

3. На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k < 0,\ b > 0$ 2) $k < 0,\ b < 0$ 3) $k > 0,\ b < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

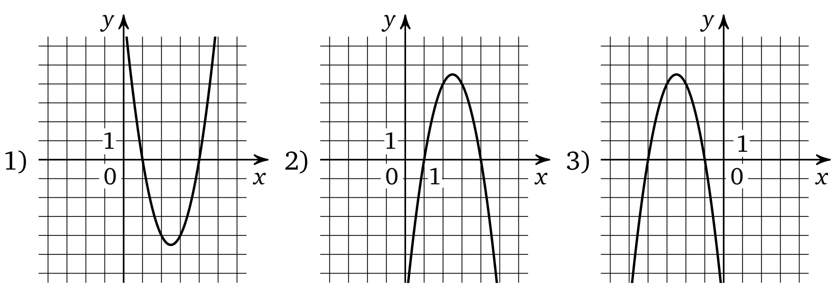
А	Б	В

4. Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y = 2x^2 - 10x + 8$ Б) $y = -2x^2 + 10x - 8$ В) $y = -2x^2 - 10x - 8$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

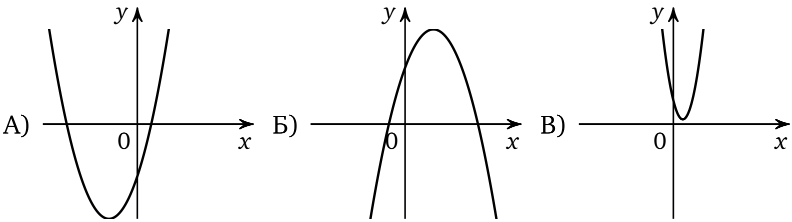
А	Б	В

5. На рисунках изображены графики функций вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

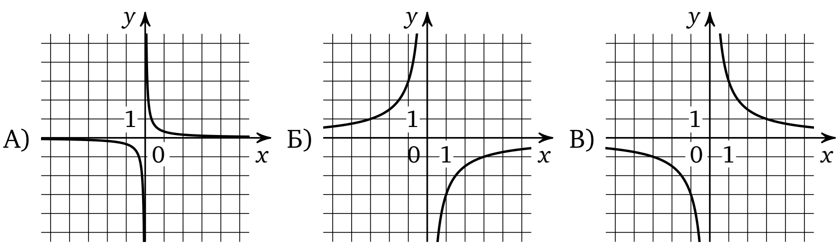
1) $a < 0,\ c > 0$ 2) $a > 0,\ c > 0$ 3) $a > 0,\ c < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{3}{x}$ 2) $y = \dfrac{1}{3x}$ 3) $y = \dfrac{3}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

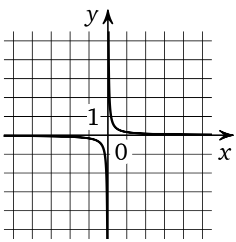
А	Б	В

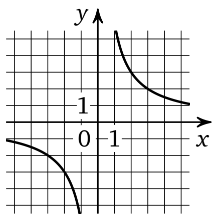
7. Установите соответствие между функциями и их графиками.

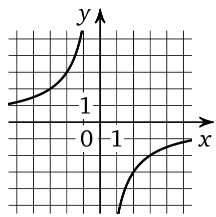
ФУНКЦИИ

А) $y = \dfrac{1}{6x}$ Б) $y = -\dfrac{6}{x}$ В) $y = \dfrac{6}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

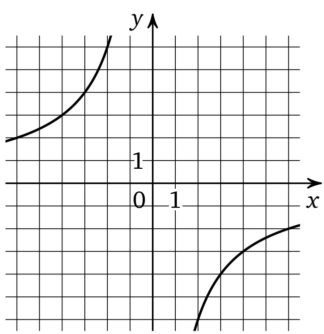
2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

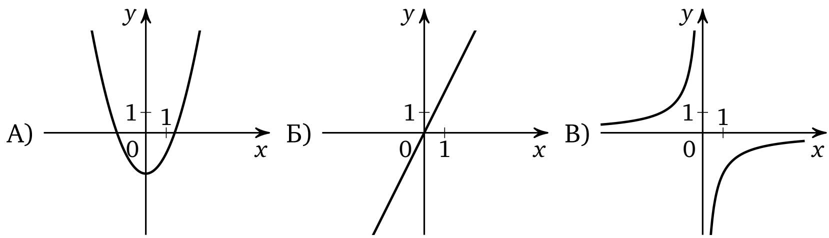
8. На рисунке изображён график функции $y = \dfrac{k}{x}$.



Определите значение коэффициента k.

9. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

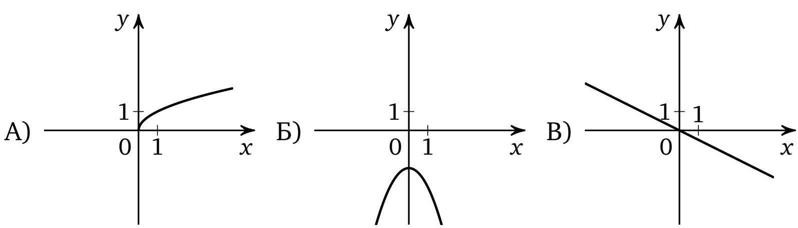
1) $y = -\dfrac{2}{x}$ 2) $y = 2x$ 3) $y = x^2 - 2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{1}{2}x$ 2) $y = -x^2 - 2$ 3) $y = \sqrt{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

Задание 6

Краткие методические рекомендации

Задание 6 ОГЭ по математике представляет собой задачу на числовые последовательности, прежде всего на арифметическую или геометрическую прогрессию.

Напомним, что *числовой последовательностью* называется набор чисел, для которых указан порядок их следования, т. е. каждому из чисел набора приписан определённый порядковый номер, причём любые два числа из набора (даже если они равны) имеют разные номера. Иными словами, последовательность — не что иное, как функция, определённая на множестве натуральных чисел. График такой функции представляет собой множество точек с натуральными абсциссами, ординаты которых находятся по определённому правилу. Это правило, как и в случае любой другой функции, может быть дано в виде описания, таблицы, формулы либо даже сразу в виде самого графика. Обычно последовательность обозначается (a_n) или $\{a_n\}$. Скобки указывают именно на обозначение последовательности, а их отсутствие, т. е. запись a_n, означает, что речь идёт об n-м члене последовательности.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом d, называемым *разностью прогрессии*. Разность арифметической прогрессии может быть любым числом: положительным, отрицательным, нулём. Таким образом, для того чтобы однозначно определить арифметическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и разность, т. е. арифметическая прогрессия задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её разность. На числовой прямой члены арифметической прогрессии с разностью, отличной от нуля, изображаются точками, расстояние между двумя любыми соседними из которых равно $|d|$.

Из определения арифметической прогрессии вытекают формула её n-го члена

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

и формула суммы S_n её первых n членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

При решении некоторых задач могут оказаться полезными следующие свойства, также вытекающие из определения арифметической прогрессии:

1) $a_k + a_l = a_p + a_q$ в том и только том случае, если $k + l = p + q$, т. е. сумма двух любых членов арифметической прогрессии равна сумме двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $a_k = \dfrac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}$ (здесь $k > m$), т. е. каждый член арифметической прогрессии начиная со второго есть среднее арифметическое двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, каждый член арифметической прогрессии начиная со второго равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов этой прогрессии.

Обратим внимание на то, что если для какой-то числовой последовательности выполнено свойство 2, то эта последовательность является арифметической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством арифметической прогрессии.

Перейдём к примерам.

Пример 1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана двумя первыми членами: -11; -8; … Найдите: а) разность прогрессии; б) третий член прогрессии.

Решение. а) Разность d арифметической прогрессии равна разности любого её члена начиная со второго и предыдущего члена. В данном случае $d = -8 - (-11) = 3$.

б) Третий член прогрессии равен сумме её второго члена и разности прогрессии: $-8 + 3 = -5$.

Ответ. а) 3; б) -5.

При решении предыдущей задачи можно было бы обойтись без формального выписывания разности, заметив, что второй член прогрессии на 3 больше первого. Значит, число 3 и есть разность прогрессии. Тогда и третий больше второго на 3, т. е. равен -4.

Пример 2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 8n + 3$. Какое из следующих чисел является её членом?

1) 88 881 2) 88 882 3) 88 883 4) 88 884

Решение. Членами последовательности являются натуральные числа, остаток от деления которых на 8 равен 3. Таким числом среди указанных в условии является, очевидно, только 88 883.

Ответ. 3.

Обратим внимание на то, что данная в условии примера 2 последовательность является арифметической прогрессией. Это следует из того, что разность между любым её членом начиная со второго и предыдущим членом одна и та же. В самом деле, если $a_n = 8n + 3$, то $a_{n+1} = 8(n+1) + 3 = 8n + 11$, откуда $a_{n+1} - a_n = 8n + 11 - 8n - 3 = 8$, т. е. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью $d = 8$.

Пример 3. Последовательность (c_n) задана условиями $c_1 = 6$, $c_{n+1} = c_n - 9$. Найдите c_7.

Решение. Поскольку $c_{n+1} - c_n = -9$, последовательность (c_n) является арифметической прогрессией с разностью $d = -9$. Поэтому $c_7 = c_1 + 6d = 6 + 6 \cdot (-9) = -48$.

Ответ. -48.

Пример 4. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью, отличной от нуля. Вычислите $\dfrac{a_{10} - a_1}{a_9 - a_7} + \dfrac{a_{11} - a_6}{a_8 - a_4}$.

Решение. Воспользуемся формулой n-го члена арифметической прогрессии и перепишем данное выражение в виде

$$\frac{a_1 + 9d - a_1}{a_1 + 8d - a_1 - 6d} + \frac{a_1 + 10d - a_1 - 5d}{a_1 + 7d - a_1 - 3d},$$

откуда после упрощений получим

$$\frac{9d}{2d} + \frac{5d}{4d} = \frac{9}{2} + \frac{5}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75.$$

Ответ. 5,75.

Пример 5. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (a_n), если сумма первых десяти её членов равна 640, а сумма первых шестидесяти её членов равна -960.

Решение. Найдём сначала a_1 и d. По условию

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1 + a_1 + 9d) \cdot 5 = 640,$$

откуда $2a_1 + 9d = 128$. Аналогично

$$S_{60} = \frac{a_1 + a_{60}}{2} \cdot 60 = (a_1 + a_1 + 59d) \cdot 30 = -960,$$

откуда $2a_1 + 59d = -32$. Вычтем из последнего равенства почленно равенство $2a_1 + 9d = 128$. Получим $50d = -160$, откуда $d = -3{,}2$. Но тогда $2a_1 = 128 + 9 \cdot 3{,}2 = 156{,}8$, откуда $a_1 = 78{,}4$. Осталось найти искомую сумму:

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = (a_1 + a_1 + 29d) \cdot 15 = \\ = (2 \cdot 78{,}4 + 29 \cdot (-3{,}2)) \cdot 15 = 960.$$

Ответ. 960.

Заметим, что ответ примера 5 был получен с использованием стандартного алгоритма решения подобных задач: по данным условия были составлены два уравнения, которые позволили найти a_1 и d — базовые элементы прогрессии, после чего с их помощью была вычислена требуемая величина.

Если условие задачи позволяет составить только одно равенство (уравнение), то, скорее всего, для решения задачи нужно воспользоваться определением прогрессии (см. пример 4) или применить свойства 1 или 2.

Пример 6. Найдите значение выражения $\dfrac{a_{13}+a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{16}}$, если известно, что числовая последовательность (a_n) является арифметической прогрессией.

Решение. Из условия задачи следует, что $a_{16} \neq 0$. Для решения задачи воспользуемся свойством 2, из которого следует, что

$$a_{13}+a_{19}=2a_{16}, \quad a_{15}+a_{17}=2a_{16}.$$

Поэтому искомое значение равно $\dfrac{4a_{16}}{a_{16}}=4$.

Ответ. 4.

Приведём теперь основные определения и факты, связанные с геометрической прогрессией.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля, а любой другой её член равен предыдущему, умноженному на одно и то же для данной последовательности отличное от нуля число q, называемое *знаменателем прогрессии*. Таким образом, в отличие от определения арифметической прогрессии, определение геометрической прогрессии, содержит ограничения на оба её базовых элемента: $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$. Из определения геометрической прогрессии следует и то, что любой её член отличен от нуля.

Таким образом, для того чтобы однозначно определить геометрическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и знаменатель, т. е. геометрическая прогрессия, как и арифметическая, задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её знаменатель. В более сложных задачах по данным условия можно составить два равенства (уравнения), которые позволят найти b_1 и q, а уже затем с их помощью вычислить искомую величину.

Определение геометрической прогрессии позволяет найти формулу её n-го члена $b_n=b_1 \cdot q^{n-1}$ и формулу суммы S_n её первых n членов $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (для прогрессии, знаменатель которой отличен от 1). Если же знаменатель геометрической прогрессии равен 1, то все её члены равны первому и $S_n = n \cdot b_1$.

Напомним ещё два свойства, которые могут оказаться полезными при решении ряда задач:

1) $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_q$ в том и только том случае, если $k + l = p + q$, т. е. произведение двух любых членов геометрической прогрессии равно произведению двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $b_k^2 = b_{k-m} \cdot b_{k+m}$ (здесь $k > m$), т. е. каждый член геометрической прогрессии начиная со второго равен произведению двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, для прогрессии с положительными членами $b_k = \sqrt{b_{k-m} \cdot b_{k+m}}$, т. е. каждый член геометрической прогрессии с положительными членами начиная со второго равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов этой прогрессии.

Обратим внимание на то, что если для какой-то числовой последовательности выполнено свойство 2, то эта последовательность является геометрической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством геометрической прогрессии.

Пример 7. Геометрическая прогрессия (b_n) задана двумя первыми членами: -2; 10; … Найдите: а) знаменатель прогрессии; б) пятый член прогрессии.

Решение. а) Знаменатель q геометрической прогрессии равен отношению любого её члена начиная со второго и предыдущего члена. В данном случае $q = \frac{10}{-2} = -5$.

б) Пятый член прогрессии равен произведению её второго члена и куба знаменателя прогрессии: $10 \cdot (-5)^3 = -1250$.

Ответ. а) -5; б) -1250.

При решении предыдущей задачи можно было бы обойтись без формального выписывания знаменателя, заметив, что второй член прогрессии получается умножением первого на -5. Значит, число -5 и есть знаменатель прогрессии. Тогда её пятый член равен $10 \cdot (-5)^3 = -1250$.

Пример 8. Числовая последовательность (b_n) задана условиями $b_1 = -128$, $b_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$. Найдите b_4.

Решение. Из условия задачи следует, что первый член данной последовательности отличен от нуля, а каждый её член начиная со второго равен предыдущему, умноженному на число $\frac{3}{4}$. Значит, данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{3}{4}$. Поэтому

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = -128 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = -128 \cdot \frac{27}{64} = -2 \cdot 27 = -54.$$

Ответ. -54.

Пример 9. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_6 = 6$, $b_9 = 0{,}75$.

Решение. Из формулы n-го члена геометрической прогрессии следует, что $b_9 = b_1 \cdot q^8$, $b_6 = b_1 \cdot q^5$. Значит,

$$\frac{b_9}{b_6} = \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^5} = q^3, \quad \text{т. е.} \quad q^3 = \frac{0{,}75}{6} = \frac{1}{8},$$

откуда $q = \frac{1}{2}$. Тогда

$$b_1 = \frac{b_6}{q^5} = \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 6 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192.$$

Поэтому

$$S_7 = b_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 192 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 192 \cdot \frac{-\frac{127}{128}}{-\frac{1}{2}} = 192 \cdot \frac{127}{64} = 3 \cdot 127 = 381.$$

Ответ. 381.

Если условие задачи позволяет составить только одно равенство (уравнение) или вовсе не предполагает этого, то, скорее всего, для решения задачи нужно применить свойства 1 или 2.

Пример 10. Найдите значение выражения

$$\frac{b_2 \cdot b_{32} + b_4 \cdot b_{30} + b_6 \cdot b_{28}}{20b_{17}^2},$$

если известно, что числовая последовательность (b_n) является геометрической прогрессией.

Решение. Из условия задачи следует, что $b_{17} \neq 0$. Для решения задачи воспользуемся свойством 2, из которого следует, что каждое слагаемое числителя равно b_{17}^2. Поэтому искомое значение равно $\frac{3b_{17}^2}{20b_{17}^2} = 0{,}15$.

Ответ. 0,15.

Подготовительные задачи

1. Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна $-8{,}5$ и $a_1 = -6{,}8$. Найдите a_5.

2. Выписаны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:

$$\ldots;\ -6;\ x;\ -2;\ 0;\ \ldots$$

Найдите x.

3. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

$$a_{10} = -10, \quad a_{16} = -19.$$

Найдите разность прогрессии.

4. Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна $1{,}1$ и $a_1 = -7$. Найдите сумму первых восьми её членов.

5. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии:

$$20;\ 13;\ 6;\ \ldots$$

Найдите седьмой член этой прогрессии.

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$100;\ 20;\ 4;\ \ldots$$

Найдите её пятый член.

7. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ 3;\ x;\ 75;\ -375;\ \ldots$$

Найдите x.

8. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -6, \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

Найдите b_6.

9. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -3, \quad b_{n+1} = -4b_n.$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

10. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-1250;\ -250;\ -50;\ \ldots$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

Зачётные задачи

1. Выписаны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:

$$\ldots;\ -9;\ x;\ -13;\ -15;\ \ldots$$

Найдите x.

2. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

$$a_3 = -21{,}4, \quad a_{13} = -40{,}4.$$

Найдите разность прогрессии.

3. Последовательность (a_n) задана условиями

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4.$$

Найдите a_6.

4. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии:

$$-6;\ 1;\ 8;\ \ldots$$

Найдите шестой член этой прогрессии.

5. Последовательность (b_n) задана условиями

$$b_1 = -6, \quad b_{n+1} = -2 \cdot \frac{1}{b_n}.$$

Найдите b_5.

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-175;\ -140;\ -112;\ \ldots$$

Найдите её пятый член.

7. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ 162;\ x;\ 18;\ -6;\ \ldots$$

Найдите x.

8. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -2, \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

Найдите b_7.

9. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -2, \quad b_{n+1} = -3b_n.$$

Найдите сумму первых семи её членов.

10. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-384;\ -96;\ -24;\ \ldots$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

Задание 7

Краткие методические рекомендации

Задание 7 ОГЭ по математике — это задача на преобразование рациональных алгебраических выражений и вычисление их значений. Решение задач на преобразование выражений предполагает, как правило, последовательное упрощение данных выражений. При этом используются свойства степеней и формулы сокращённого умножения. Упрощение выражений обычно сводится к приведению подобных слагаемых и сокращению дробей после некоторых предварительных действий, важнейшим из которых является разложение на множители. Последнее, в свою очередь, заключается в выполнении одного или нескольких из следующих четырёх правил: 1) «примени формулу или свойство»; 2) «сгруппируй слагаемые»; 3) «вынеси за скобки»; 4) «добавь и вычти». Рассмотрим несколько примеров, начав с правила «примени формулу или свойство».

Пример 1. Найдите значение выражения

$$(5x-8)(5x+8)-25x^2+4x+54 \quad \text{при } x=20{,}3.$$

Решение. Сначала упростим данное выражение, применив формулу разности квадратов и приведя подобные слагаемые:

$$(5x-8)(5x+8)-25x^2+4x+54 =$$
$$= 25x^2-64-25x^2+4x+54 = 4x-10.$$

При $x=20{,}3$ искомое значение равно $4\cdot 20{,}3-10=71{,}2$.

Ответ. 71,2.

В качестве примера, иллюстрирующего правило «добавь и вычти», рассмотрим следующий.

Пример 2. Разложите на множители выражение $64a^4+1$.

Решение. Дополним данное выражение до квадрата суммы, добавив к нему и вычтя из него $16a^2$. Получим

$$64a^4+1 = (64a^4+16a^2+1)-16a^2 = (8a^2+1)^2-(4a)^2.$$

Теперь применим формулу разности квадратов:

$$(8a^2+1)^2-(4a)^2 = (8a^2-4a+1)(8a^2+4a+1).$$

Поскольку дискриминант каждого из квадратных трёхчленов в правой части последнего равенства отрицателен, разложение ни одного из них на линейные множители невозможно.

Ответ. $(8a^2-4a+1)(8a^2+4a+1)$.

Преобразование дробно-рациональных алгебраических выражений предполагает те же самые действия, что и преобразование целых алгебраических выражений, но к этим действиям добавляется приведение дробей к общему знаменателю и сокращение дробей.

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{a^{47}\cdot a^{-19}}{a^{29}}$ при $a=0{,}08$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней с одинаковым основанием:

$$\frac{a^{47}\cdot a^{-19}}{a^{29}}=a^{47+(-19)-29}=a^{-1}=\frac{1}{a}.$$

Поскольку $a=0{,}08=\frac{2}{25}$, искомое значение будет равно

$$1:\frac{2}{25}=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

Ответ. 12,5.

Перейдём к примерам применения правил «сгруппируй слагаемые» и «вынеси за скобки».

Пример 4. Найдите значение выражения $\frac{29xy-12ab-21yx+17ba}{8axy+5a^2b}$ при $x=1{,}23$, $y=1{,}24$, $a=1{,}25$, $b=1{,}26$.

Решение. Заметим, что при положительных значениях переменных знаменатель дроби положителен и, следовательно, отличен от нуля. Прямая подстановка данных значений переменных приведёт к громоздким вычислениям. Поэтому попытаемся вначале упростить выражение. Выполним необходимую группировку в числителе дроби:

$$29xy-12ab-21yx+17ba=(29xy-21yx)+(17ba-12ab)=$$
$$=8xy+5ab.$$

Вынесем за скобки общий множитель в знаменателе:

$$8axy+5a^2b=a(8xy+5ab).$$

Получим, что данная дробь приводится к виду $\frac{8xy+5ab}{a(8xy+5ab)}=\frac{1}{a}$. Поскольку $a=1{,}25=\frac{5}{4}$, получим, что $\frac{1}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Ответ. 0,8.

Пример 5. Найдите значение выражения $\frac{123xy-456xz}{123y-456z}+55{,}66$ при $x=12{,}34$, $y=23{,}45$, $z=34{,}56$.

Решение. Сократим дробь $\frac{123xy-456xz}{123y-456z}$, вынеся за скобки общий множитель:

$$\frac{123xy-456xz}{123y-456z}=\frac{x(123y-456z)}{123y-456z}=x.$$

Сокращение дроби возможно и в данном случае, поскольку

$$123y - 456z \neq 0$$

хотя бы в силу того, что последние цифры чисел $123y$ и $456z$ при данных значениях y и z различны (они равны соответственно 5 и 6). Итак, данное выражение приводится к виду $x + 55{,}66$, а его значение при $x = 12{,}34$ равно 68.

Ответ. 68.

Подготовительные задачи

1. Найдите значение выражения $(a-4)^2-2a(5a-4)$ при $a=-\frac{1}{3}$.

2. Найдите значение выражения $(4d-3)(4d+3)-(4d+3)^2$ при $d=50$.

3. Найдите значение выражения $\frac{9}{x}-\frac{9}{5x}$ при $x=-2$.

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{4x}-\frac{4x+y}{4xy}$ при $x=\sqrt{22}$, $y=\frac{1}{6}$.

5. Найдите значение выражения $(x+1):\frac{x^2+2x+1}{x-1}$ при $x=4$.

6. Найдите значение выражения $\frac{a+x}{a}:\frac{ax+x^2}{a^2}$ при $a=56$, $x=40$.

7. Найдите значение выражения $\frac{a-5x}{a}:\frac{ax-5x^2}{a^2}$ при $a=-74$, $x=-10$.

8. Найдите значение выражения $3b-\frac{3b^2-a}{b}$ при $a=-79$, $b=-2$.

9. Найдите значение выражения $\frac{a^2-81}{2a^2-18a}$ при $a=1{,}5$.

10. Найдите значение выражения $\frac{a^2-9b^2}{3ab}:\left(\frac{1}{3b}-\frac{1}{a}\right)$ при $a=2\frac{2}{17}$, $b=9\frac{5}{17}$.

Зачётные задачи

1. Найдите значение выражения $(a+3)^2-2a(3-4a)$ при $a=-\frac{1}{3}$.

2. Найдите значение выражения $28ab+(2a-7b)^2$ при $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{8}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{6}{x}-\frac{3}{2x}$ при $x=-1{,}8$.

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{7x}-\frac{7x+5y}{35xy}$ при $x=\sqrt{29}$, $y=\frac{1}{2}$.

5. Найдите значение выражения $(x-3):\frac{x^2-6x+9}{x+3}$ при $x=-21$.

6. Найдите значение выражения $\frac{a+9x}{a}:\frac{ax+9x^2}{a^2}$ при $a=-99$, $x=-66$.

7. Найдите значение выражения $\frac{a-7x}{a}:\frac{ax-7x^2}{a^2}$ при $a=-6$, $x=10$.

8. Найдите значение выражения $8a-\frac{8a^2-3c}{a}$ при $a=15$, $c=12$.

9. Найдите значение выражения $\frac{a^2-9}{6a^2-18a}$ при $a=-0{,}3$.

10. Найдите значение выражения $\frac{a^2-36b^2}{6ab}:\left(\frac{1}{6b}-\frac{1}{a}\right)$ при $a=5\frac{5}{17}$, $b=5\frac{2}{17}$.

Задание 8

Краткие методические рекомендации

Задание 8 ОГЭ по математике представляет собой линейное или квадратное неравенство либо систему двух простейших линейных неравенств.

Напомним, что функция $y=ax+b$ при $a\neq 0$ называется линейной. Неравенства вида $ax+b\vee 0$ при $a\neq 0$ (знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$») также называются линейными. При $a\neq 0$ алгебраическое выражение $f(x)=ax+b$ является многочленом первой степени. Соответственно, линейные неравенства — это целые неравенства первой степени.

Линейные неравенства обычно приводят к виду $ax\vee -b$, после чего делят обе части последнего неравенства на число a. Стандартная ошибка в решениях линейных неравенств связана именно с этим делением: если число a отрицательно, знак неравенства нужно изменить на противоположный, о чём многие забывают. При решении неравенств вида $ax+b\vee cx+d$ удобно все слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть, а все числа — в правую: $ax-cx\vee d-b$, откуда $(a-c)x\vee d-b$. Если $a\neq c$, остаётся сделать последний шаг — разделить обе части неравенства на число $a-c$ (с изменением знака неравенства на противоположный в случае, если это число отрицательно). Если $a=c$, получаем неравенство вида $0\cdot x\vee d-b$, которое — в зависимости от знака неравенства и числа в правой части — либо не имеет решений, либо справедливо при любом действительном значении переменной.

Пример 1. Решите неравенство $5x+8<8x+5$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$5x-8x<5-8,\quad \text{откуда}\quad -3x<-3.$$

Разделим обе части последнего неравенства на число -3, поменяв знак неравенства на противоположный. Получим $x>1$.

Ответ. $(1;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство

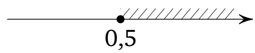
$$3x+10\leqslant 7x+8$$

и изобразите множество его решений на числовой оси.

Решение. Приведём неравенство к виду

$$3x-7x\leqslant 8-10,\quad \text{откуда}\quad -4x\leqslant -2.$$

Разделим обе части полученного неравенства на число -4, изменив знак неравенства на противоположный: $x \geqslant 0{,}5$. Изобразим множество решений на числовой оси:



Ответ. $[0{,}5; +\infty)$.

Пример 3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце отвечает одно из множеств решений, отмеченных на числовой оси, в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и множествами их решений.

НЕРАВЕНСТВА

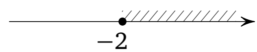
А) $7x + 14 \geqslant 0$

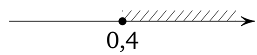
Б) $12 - 30x \geqslant 0$

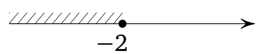
В) $4x - 14 \geqslant 11x$

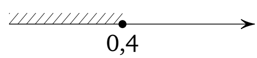
Г) $14x - 12 \geqslant -16x$

МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

1) 

2) 

3) 

4) 

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

А	Б	В	Г

Решение. Рассмотрим последовательно решение каждого из неравенств. Неравенство А приводится к виду $x \geqslant -2$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 1. Неравенство Б приводится к виду $x \leqslant 0{,}4$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 4. Неравенство В приводится к виду $x \leqslant -2$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 3. Неравенство Г приводится к виду $x \geqslant 0{,}4$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 2.

Ответ.

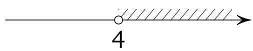
А	Б	В	Г
1	4	3	2

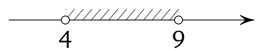
Заметим, что последнее неравенство можно было бы не решать. Тем не менее настоятельно рекомендуется получить множества решений всех четырёх неравенств: если на последнем шаге ответ не будет соответствовать оставшемуся множеству, значит, где-то была допущена ошибка и следует проверить все сделанные преобразования.

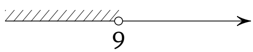
Решение системы двух и более линейных неравенств обычно предполагает решение каждого из них, после чего находится пересечение полученных множеств решений.

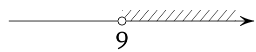
Пример 4. Укажите множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 27-3x>0, \\ 9-4x<-7. \end{cases}$$

1) 

3) 

2) 

4) 

Решение. Первое неравенство приводится к виду $3x<27$, откуда $x<9$. Второе неравенство приводится к виду $-4x<-16$, откуда $x>4$. Значит, множеством решений данной системы является промежуток $(4; 9)$, изображённый на рисунке 3.

Ответ. 3.

Пример 5. Каждое из четырёх неравенств в правом столбце получено в результате преобразований одного из неравенств или системы неравенств в левом столбце. Установите соответствие между неравенствами и системами неравенств в левом столбце и результатами их преобразований.

НЕРАВЕНСТВА	РЕЗУЛЬТАТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
А) $\begin{cases} x-5<2, \\ 3-7x<17 \end{cases}$	1) $x<7$
Б) $-5<4x+23<31$	2) $-2<x<7$
В) $5x-13<-11+6x$	3) $x>-2$
Г) $\begin{cases} 3x+22<43, \\ 7-2x>-11 \end{cases}$	4) $-7<x<2$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

А	Б	В	Г

Решение. Система неравенств А приводится к виду

$$\begin{cases} x < 7, \\ x > -2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad -2 < x < 7.$$

Значит, результатом преобразований является двойное неравенство 2. Двойное неравенство Б приводится к виду $-28 < 4x < 8$, откуда $-7 < x < 2$. Значит, результатом преобразований является двойное неравенство 4. Неравенство В приводится к виду $-x < 2$, откуда $x > -2$. Значит, результатом преобразований является неравенство 3. Система неравенств Г приводится к виду

$$\begin{cases} x < 7, \\ x < 9, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x < 7.$$

Значит, результатом преобразований является неравенство 1.

Ответ.

А	Б	В	Г
2	4	3	1

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7(6x-5)-5(6x-7) \geqslant 12x-34, \\ \dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{2} \leqslant \dfrac{x-5}{4}+\dfrac{x-4}{5}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Раскроем скобки в левой части этого неравенства:

$$42x-35-30x+35 \geqslant 12x-34.$$

После упрощений получим $12x \geqslant 12x-34$, откуда $12x-12x \geqslant -34$, или $0 \cdot x \geqslant -34$. Решением последнего неравенства является любое действительное число. Следовательно, решением всей системы будет решение её второго неравенства. Решим второе неравенство данной системы. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на общий знаменатель всех дробей, т. е. на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Получим

$$20(x-2)+30(x-3) \leqslant 15(x-5)+12(x-4).$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые в каждой части полученного неравенства:

$$20x-40+30x-90 \leqslant 15x-75+12x-48,$$

откуда $50x-130 \leqslant 27x-123$. Перенесём все слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, а все числа — в правую:

$$50x-27x \leqslant -123+130, \quad \text{откуда } 23x \leqslant 7.$$

Осталось обе части последнего неравенства разделить на 23, после чего получим $x \leqslant \frac{7}{23}$.

Ответ. $\left(-\infty; \frac{7}{23}\right]$.

Решение неравенств с дробными коэффициентами обычно связано с большим числом ошибок. Для того чтобы снизить вероятность таких ошибок, рекомендуется при возможности сначала получить неравенство с целыми коэффициентами, умножив обе его части на общий знаменатель дробей, как это было сделано при решении последнего примера.

В некоторых случаях в процессе решения линейных и более сложных неравенств после приведения подобных слагаемых получается неравенство, не содержащее переменной. Такие ситуации ставят в тупик многих учеников и выпускников, хотя ничего сложного в их интерпретации нет. Достаточно ответить на вопрос: «При каких значениях переменной выполняется полученное неравенство?» Так, например, неравенство $0 > 5$ не выполняется ни при каких допустимых значениях переменной, а неравенство $0 \leqslant 21$ выполняется при любом действительном значении переменной. При решении примера 6 неравенство $0 \geqslant -34$ для большей наглядности было записано в виде $0 \cdot x \geqslant -34$; использовать такую запись рекомендуется в тех случаях, когда ответ на вопрос о решениях неравенств, подобных приведённым выше, вызывает определённые затруднения.

Отметим, что уровень сложности каждого из неравенств примера 6 несколько превосходит уровень линейных неравенств, которые можно встретить в вариантах ОГЭ по математике базового уровня. Кроме того, в заданиях ОГЭ обычно нужно выбрать множество решений неравенства из нескольких предложенных либо поставить в соответствие каждому из нескольких данных неравенств числовые промежутки (изображённые на числовой оси или заданные простейшими неравенствами), предложенные в качестве множеств решений этих неравенств.

Неравенства вида $ax^2 + bx + c \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком «$\vee$» обозначен, как обычно, один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$») называются квадратными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax^2 + bx + c$ является многочленом второй степени. Соответственно, квадратные неравенства — это целые неравенства второй степени.

Множество решений квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$ определяется, в сущности, знаком старшего коэффициента a и знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Если $a > 0$ и $D > 0$, то

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{при всех } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty);$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{при всех } x \in (x_1; x_2);$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{при } x = x_1 \text{ и } \ x = x_1,$$

где $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Если $a > 0$ и $D = 0$, то

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{при всех } x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty), \text{ где } x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{при } x = x_0 = -\frac{b}{2a};$$

неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ решений не имеет.

Если $a > 0$ и $D < 0$, то

неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ выполняются при всех действительных x;

неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ решений не имеют.

Замечание. В случае отрицательного старшего коэффициента ($a < 0$) целесообразно сразу умножить обе части неравенства

$$ax^2 + bx + c \vee 0$$

на -1, поменяв знак неравенства на противоположный. Это нехитрое правило позволит решать квадратные неравенства только с положительным старшим коэффициентом и настоятельно рекомендуется к применению: число ошибок при решении квадратных неравенств с отрицательным старшим коэффициентом на ОГЭ по математике выходит за границы разумного, причём ошибки (как в определении знаков корней квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, так и в выписывании самих решений) совершают в большом количестве даже сильные ученики.

Квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \vee 0$ с положительным старшим коэффициентом будем в дальнейшем называть базовым. Поскольку наиболее распространённым типом квадратных неравенств являются неравенства с положительным дискриминантом, найдя нули квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (или, что то же самое, корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$), т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, можно, основываясь на свойствах квадратичной функции, сразу выписать множество решений неравенства. При положительном дискриминанте для базовых квадратных неравенств вида

$ax^2+bx+c<0$ или $ax^2+bx+c\leqslant 0$ этим множеством является промежуток «между корнями» трёхчлена, т. е. $(x_1; x_2)$ или $[x_1; x_2]$ соответственно; для базовых квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c\geqslant 0$ множеством решений является объединение промежутков «за корнями» трёхчлена, т. е. $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ или $(-\infty; x_1]\cup[x_2; +\infty)$ соответственно.

Другой способ решения квадратных неравенств связан с разложением квадратного трёхчлена на линейные множители и применением метода интервалов. Напомним, что если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ положителен, а $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ — корни трёхчлена, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Точки x_1 и x_2 разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых знак функции $f(x)$ легко определить по её знаку в одной из точек промежутка, после чего остаётся записать ответ. При решении неполных квадратных неравенств, т. е. неравенств вида $ax^2+bx\vee 0$ или $ax^2+c\vee 0$, обычно используют разложение на линейные множители путём вынесения общего множителя или применения формулы разности квадратов.

Замечание. Промежутки знакопостоянства выражения

$$a(x-x_1)(x-x_2)\quad \text{при } a>0$$

можно определить ещё и следующим образом. Так как $a>0$, при любом значении переменной x число $a(x-x_1)(x-x_2)$ будет иметь тот же знак, что и число $(x-x_1)(x-x_2)$. Поскольку $x_1<x_2$, имеем $x-x_1>x-x_2$ при любом значении x. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если меньшее из них отрицательно, а большее положительно:

$$\begin{cases} x-x_1>0,\\ x-x_2<0, \end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases} x>x_1,\\ x<x_2, \end{cases}$$

т. е. $x_1<x<x_2$, или $x\in(x_1; x_2)$. Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если меньшее из них положительно (тогда и большее положительно) или большее отрицательно (тогда и меньшее отрицательно):

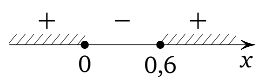
$$\left[\begin{array}{l} x-x_1<0,\\ x-x_2>0, \end{array}\right.\quad \text{откуда}\quad \left[\begin{array}{l} x<x_1,\\ x>x_2, \end{array}\right.$$

т. е. $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$.

Итак, если привести квадратное неравенство к базовому виду и найти корни соответствующего квадратного трёхчлена, можно практически сразу записать ответ: в случае существования двух различных корней x_1 и x_2 решением неравенства будет либо промежуток между ними, либо объединение двух числовых лучей с началами в точках x_1 и x_2.

Пример 7. Решите неравенство $3x \leqslant 5x^2$.

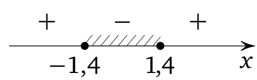
Решение. Приведём неравенство к базовому виду: $5x^2 - 3x \geqslant 0$, откуда $5x(x - 0{,}6) \geqslant 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов:



Ответ. $(-\infty; 0] \cup [0{,}6; +\infty)$.

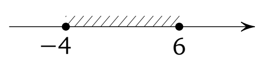
Пример 8. Решите неравенство $98 - 50x^2 \geqslant 0$.

Решение. Приведём неравенство к базовому виду, разделив обе его части на -2 и перегруппировав слагаемые: $25x^2 - 49 \leqslant 0$. Разложим по формуле разности квадратов левую часть полученного неравенства на множители: $(5x - 7)(5x + 7) \leqslant 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ. $[-1{,}4; 1{,}4]$.

Пример 9. Укажите неравенство, множество решений которого изображено на рисунке.



1) $x^2 + 2x - 24 < 0$

2) $x^2 - 2x - 24 \leqslant 0$

3) $x^2 - 10x - 24 \geqslant 0$

4) $x^2 + 10x - 24 > 0$

Решение. Можно последовательно решить каждое из данных неравенств и получить правильный ответ. А можно проанализировать данные неравенства и отбросить те из них, множеством решений которых не может быть данный отрезок. Сделаем это. Поскольку старший коэффициент любого из данных неравенств положителен, а множеством решений неравенства является отрезок, нужно отбросить все строгие неравенства и все нестрогие неравенства со знаком «$\geqslant$». В данном случае останется только одно неравенство 2.

Ответ. 2.

При решении квадратных неравенств, как и при решении квадратных уравнений, часто оказываются полезными формулы Виета (см. методические указания к заданию 4).

Пример 10. Решите неравенство $9x^2-64x+7\leqslant 0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $9\cdot 7=63$, а сумма равна 64. Уже простейший делитель числа 63 позволяет найти искомые числа: $1\cdot 63=63$, $1+63=64$. Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{1}{9}$ и $\frac{63}{9}=7$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, решением неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{9}; 7\right]$.

Ответ. $\left[\frac{1}{9}; 7\right]$.

Пример 11. Решите неравенство $4x^2-19x+12>0$.

Решение. Найдём два числа, произведение которых равно $4\cdot 12=48$, а сумма равна 19. Перебирая пары делителей числа 48 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 48, 2 и 24, 3 и 16...), уже на третьем шаге находим числа, сумма которых равна 19: это 3 и 16. Разделив каждое из них на 4, получим корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{4}=0{,}75$ и $\frac{16}{4}=4$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена решением неравенства является множество $(-\infty; 0{,}75)\cup(4; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0{,}75)\cup(4; +\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $6x^2+7x-5<0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $6\cdot(-5)=-30$, а сумма равна -7. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 30 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -30, 2 и -15, ... На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -7: это 3 и -10. Разделив каждое из этих чисел на 6, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, решением неравенства является интервал $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Разумеется, рассмотренный приём применим только в тех случаях, когда корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства рациональны.

Подготовительные задачи

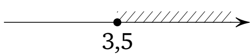
1. Укажите решение неравенства $-9-6x>9x+9$.

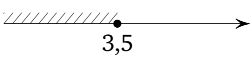
1) $(-\infty; -1{,}2)$
2) $(0; +\infty)$
3) $(-1{,}2; +\infty)$
4) $(-\infty; 0)$

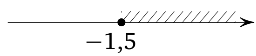
2. Укажите решение неравенства $3-2x \geqslant 8x-1$.

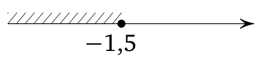
1) $[-0{,}2; +\infty)$
2) $(-\infty; 0{,}4]$
3) $[0{,}4; +\infty)$
4) $(-\infty; -0{,}2]$

3. Укажите решение неравенства $4x+5 \geqslant 6x-2$.

1) 

2) 

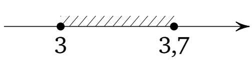
3) 

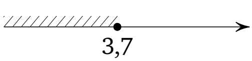
4) 

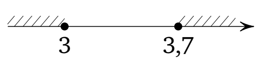
4. Укажите решение неравенства $9x-4(x-7) \geqslant -3$.

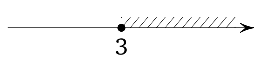
1) $[5; +\infty)$
2) $(-\infty; -6{,}2]$
3) $[-6{,}2; +\infty)$
4) $(-\infty; 5]$

5. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x-3{,}7 \leqslant 0, \\ x-2 \geqslant 1. \end{cases}$

1) 

2) 

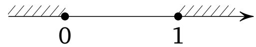
3) 

4) 

6. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2+70>0$
2) $x^2-70>0$
3) $x^2+70<0$
4) $x^2-70<0$

7. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



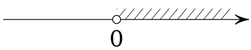
1) $x^2-1\geqslant 0$

2) $x^2-x\geqslant 0$

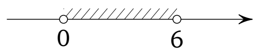
3) $x^2-1\leqslant 0$

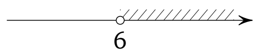
4) $x^2-x\leqslant 0$

8. Укажите решение неравенства $6x-x^2>0$.

1) 

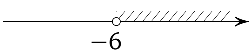
2) 

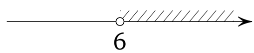
3) 

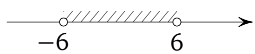
4) 

9. Укажите решение неравенства $x^2>36$.

1) 

2) 

3) 

4) 

10. Укажите решение неравенства $x^2-25<0$.

1) $(-\infty;+\infty)$

2) нет решений

3) $(-5\,;5)$

4) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$

Зачётные задачи

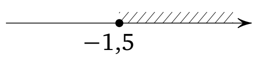
1. Укажите решение неравенства $-3-x>4x+7$.

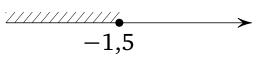
1) $(-\infty; -0{,}8)$
2) $(-\infty; -2)$
3) $(-2; +\infty)$
4) $(-0{,}8; +\infty)$

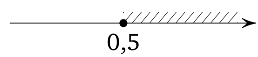
2. Укажите решение неравенства $2x-8 \geqslant 4x+6$.

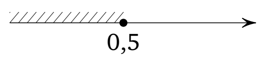
1) $(-\infty; -7]$
2) $(-\infty; 1]$
3) $[1; +\infty)$
4) $[-7; +\infty)$

3. Укажите решение неравенства $4x-5 \geqslant 2x-4$.

1) 

2) 

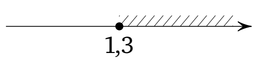
3) 

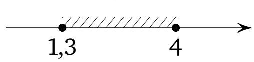
4) 

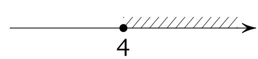
4. Укажите решение неравенства $8x-3(x+9) \geqslant -9$.

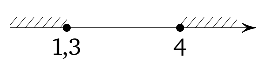
1) $[3{,}6; +\infty)$
2) $[-7{,}2; +\infty)$
3) $(-\infty; 3{,}6]$
4) $(-\infty; -7{,}2]$

5. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x-4 \geqslant 0, \\ x-0{,}3 \geqslant 1. \end{cases}$

1) 

2) 

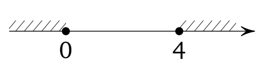
3) 

4) 

6. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2+78>0$
2) $x^2-78<0$
3) $x^2+78<0$
4) $x^2-78>0$

7. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



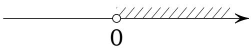
1) $x^2-16\leqslant 0$

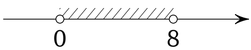
2) $x^2-4x\leqslant 0$

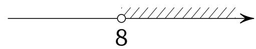
3) $x^2-4x\geqslant 0$

4) $x^2-16\geqslant 0$

8. Укажите решение неравенства $8x-x^2>0$.

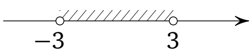
1) 

2) 

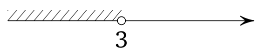
3) 

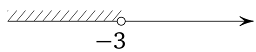
4) 

9. Укажите решение неравенства $x^2<9$.

1) 

2) 

3) 

4) 

10. Укажите решение неравенства $x^2-49>0$.

1) $(-7;\,7)$

2) нет решений

3) $(-\infty;\,+\infty)$

4) $(-\infty;\,-7)\cup(7;\,+\infty)$

Задание 21

Краткие методические рекомендации

Задание 21 ОГЭ по математике открывает блок заданий повышенного и высокого уровней сложности и представляет собой алгебраическую задачу по одной из трёх следующих тем: «Преобразование рациональных выражений», «Уравнения и системы уравнений», «Неравенства».

Меньше всего в банке заданий ОГЭ для этой позиции экзаменационной работы заданий на преобразование алгебраических выражений. Типичной является следующая.

Пример 1. Найдите значение выражения $61a - 11b + 13$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$.

Решение. Из условия $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$ получим

$$2a - 7b + 5 = 63a - 18b + 45,$$

откуда $61a - 11b + 40 = 0$. Поэтому

$$61a - 11b + 13 = (61a - 11b + 40) - 27 = -27.$$

Ответ. -27.

Для решения уравнений (именно они и составляют самую значительную часть заданий банка ОГЭ по математике на 21-ю позицию экзаменационной работы), как и в более простых задачах с кратким ответом, используются метод введения новой переменной, разложение на множители, условие равенства степеней и другие стандартные приёмы. Начнём с примера, решение которого основано на условии равенства кубов двух чисел.

Пример 2. Решите уравнение $(x-4)^6 + (x^2 - 4x + 2)^3 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x-4)^6 = -(x^2 - 4x + 2)^3$. Далее, поскольку $a^6 = (a^2)^3$, $-b^3 = (-b)^3$, получим

$$((x-4)^2)^3 = (-x^2 + 4x - 2)^3.$$

В силу того что $c^3 = d^3$, получаем $c = d$, а последнее уравнение приводится к виду $(x-4)^2 = -x^2 + 4x - 2$. Перенеся все члены уравнения в левую часть, раскрыв скобки, приведя подобные слагаемые и разделив обе части полученного уравнения на число 2, получим квадратное уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$, единственным корнем которого является 3.

Ответ. $\{3\}$.

Перейдём к примерам уравнений степени выше второй, которые решаются разложением на множители с помощью формул сокращённого умножения.

Пример 3. Решите уравнение $x^4 = (x-20)^2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x^2)^2 - (x-20)^2 = 0$ и применим формулу разности квадратов:

$$(x^2 - x + 20)(x^2 + x - 20) = 0,$$

откуда $x^2 - x + 20 = 0$, либо $x^2 + x - 20 = 0$. Уравнение $x^2 - x + 20 = 0$ не имеет корней в силу отрицательности дискриминанта; корнями уравнения $x^2 + x - 20 = 0$ являются числа -5 и 4.

Ответ. $\{-5; 4\}$.

Пример 4. Решите уравнение $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 25 = 0$.

Решение. Сначала воспользуемся формулой квадрата разности двух чисел:

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = (x^2 - 3x)^2.$$

Теперь уравнение можно переписать так: $(x^2 - 3x)^2 - 5^2 = 0$. Применив формулу разности квадратов, получим

$$(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x + 5) = 0,$$

откуда $x^2 - 3x - 5 = 0$ либо $x^2 - 3x + 5 = 0$. Корнями уравнения

$$x^2 - 3x - 5 = 0$$

являются числа $\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$ и $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$. Уравнение $x^2 - 3x + 5 = 0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ. $\left\{\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Рассмотрим теперь примеры решения уравнений степени выше второй с помощью вынесения общего множителя.

Пример 5. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$.

Решение. Несколько нестандартная запись уравнения содержит ключ к его решению. Вынесем за скобки в каждой из его частей общий множитель: $x^2(x+3) = 16(x+3)$. Перепишем полученное уравнение в виде $x^2(x+3) - 16(x+3) = 0$ и ещё раз вынесем за скобки общий множитель: $(x+3)(x^2-16) = 0$, откуда $x = -3$ либо $x^2 = 16$, т. е. $x = \pm 4$.

Ответ. $\{-4; -3; 4\}$.

Пример 6. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^2(x+4) - (x+4) = 0$ и вынесем за скобки общий множитель: $(x+4)(x^2-1) = 0$, откуда $x = -4$ либо $x^2 = 1$, т. е. $x = \pm 1$.

Ответ. $\{-4; -1; 1\}$.

Пример 7. Решите уравнение $x(x^2+2x+1)=2(x+1)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x(x+1)^2 = 2(x+1),$$

откуда $x(x+1)^2-2(x+1)=0$. Вынесем за скобки общий множитель:

$$(x+1)(x(x+1)-2) = 0.$$

Значит, $x=-1$ либо $x^2+x-2=0$. Корнями последнего уравнения являются -2 и 1.

Ответ. $\{-2; -1; 1\}$.

Уравнения вида

$$a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)+c=0$$

(их иногда называют трёхчленными) являются одними из наиболее распространённых уравнений, решаемых с помощью метода введения новой переменной. Если обозначить $f(x)$ буквой t, т. е. положить $f(x)=t$, трёхчленное уравнение сведётся к квадратному относительно переменной t уравнению $at^2+bt+c=0$. Самый известный пример этого типа уравнений — биквадратное уравнение

$$ax^4+bx^2+c=0$$

(здесь $f(x)=x^2$).

Метод введения новой переменной проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 8. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{x}$ буквой t. Уравнение примет вид

$$t^2+2t-3=0,$$

откуда $t=1$ или $t=-3$. Таким образом,

$$\frac{1}{x}=1 \quad \text{(и тогда } x=1\text{)} \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{x}=-3 \quad \text{(и тогда } x=-\tfrac{1}{3}\text{)}.$$

Ответ. $\left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$.

Пример 9. Решите уравнение $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0$.

Решение. Обозначим $(x+2)^2$ буквой t. Тогда $t\geqslant 0$ и уравнение примет вид $t^2-4t-5=0$, откуда $t=-1$ (этот корень не удовлетворяет условию $t\geqslant 0$) или $t=5$. Таким образом, $(x+2)^2=5$, откуда

$$x+2=-\sqrt{5} \quad \text{(и тогда } x=-2-\sqrt{5}\text{)} \quad \text{или}$$

$$x+2=\sqrt{5} \quad \text{(и тогда } x=-2+\sqrt{5}\text{)}.$$

Ответ. $\{-2\pm\sqrt{5}\}$.

Пример 10. Решите уравнение $9(2x-1)^4-37(2x-1)^2+4=0$.

Решение. Обозначим $(2x-1)^2$ буквой t. Тогда $t\geqslant 0$ и уравнение примет вид $9t^2-37t+4=0$, откуда $t=\frac{1}{9}$ или $t=4$ (оба корня удовлетворяют условию $t\geqslant 0$). Таким образом, либо $(2x-1)^2=\frac{1}{9}$, либо $(2x-1)^2=4$. Из уравнения $(2x-1)^2=\frac{1}{9}$ получим

$$2x-1=-\frac{1}{3}\quad (\text{и тогда } x=\frac{1}{3})\quad \text{или}$$
$$2x-1=\frac{1}{3}\qquad (\text{и тогда } x=\frac{2}{3}).$$

Из уравнения $(2x-1)^2=4$ получим

$$2x-1=-2\quad (\text{и тогда } x=-\frac{1}{2})\quad \text{или}$$
$$2x-1=2\qquad (\text{и тогда } x=\frac{3}{2}).$$

Ответ. $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right\}$.

Иррациональные уравнения, представленные в ОГЭ по математике, весьма малочисленны, и для их решения не требуется специальных знаний, нужно просто не забывать об области допустимых значений.

Пример 11. Решите уравнение $x^2+x+\sqrt{x^2-81}=\sqrt{x^2-81}+72$.

Решение. Левая и правая части уравнения определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, т. е. при $x^2-81\geqslant 0$, откуда $x^2\geqslant 81$. При допустимых значениях переменной уравнение приводится к виду $x^2+x-72=0$. Корнями последнего уравнения являются числа -9 и 8, из которых только $x=-9$ удовлетворяет неравенству $x^2\geqslant 81$.

Ответ. $\{-9\}$.

Как видно из рассмотренного примера, при решении подобных уравнений можно обойтись без формального решения неравенств, задающих ОДЗ.

Последний тип уравнений банка ОГЭ на 21-ю позицию экзаменационной работы — уравнения, решение которых основано на ограниченности алгебраических выражений в одной или обеих его частях.

Пример 12. Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

Решение. Поскольку

$$(x^2-25)^2\geqslant 0\quad \text{и}\quad (x^2+3x-10)^2\geqslant 0$$

при любом значении переменной, левая часть данного уравнения неотрицательна. Равной нулю она может быть, только если каждое из слагаемых левой части равно нулю, т. е. если

$$(x^2-25)^2=0 \qquad (\text{откуда } x=\pm 5) \quad \text{и}$$
$$(x^2+3x-10)^2=0 \quad (\text{откуда } x=-5 \text{ либо } x=2).$$

Единственное значение переменной, при котором каждое из слагаемых левой части данного уравнения обращается в нуль, — это $x=-5$.

Ответ. $\{-5\}$.

Основными методами решения систем алгебраических уравнений школьного курса математики являются следующие:

- подстановка,
- метод введения новой переменной,
- алгебраическое сложение.

Напомним некоторые важные равносильные преобразования систем уравнений (т. е. преобразования, не ведущие ни к потере решений, ни к приобретению посторонних решений):

- перенос слагаемого из одной части уравнения в другую;
- умножение обеих частей уравнения системы на одно и то же отличное от нуля число;
- почленное сложение двух уравнений системы с последующей заменой (не ведущей к изменению области допустимых значений системы) одного из них на уравнение, полученное в результате сложения;
- приведение подобных слагаемых, не ведущее к изменению области допустимых значений системы.

Почленное умножение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате умножения, может привести к приобретению посторонних решений. В этом случае следует сделать проверку найденных решений путём их подстановки в данную систему. Преобразования уравнений системы (в частности, приведение подобных слагаемых) не должны изменять области допустимых значений переменных. Сужение области допустимых значений может привести к потере решений, расширение области допустимых значений — к приобретению посторонних решений.

Пример 13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+y=4, \\ 2x^2-y=1. \end{cases}$

Решение. Если почленно сложить уравнения системы, получим $5x^2=5$, откуда $x^2=1$, и $x=\pm 1$. Найдём y, подставив найденные значения x в любое из уравнений системы, например во второе, из которого получаем $y=2x^2-1$. Тогда $y=2\cdot(\pm 1)^2-1=1$.

Ответ. $(-1;\ 1)$; $(1;\ 1)$.

Пример 14. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+6y)^2=7y, \\ (x+6y)^2=7x. \end{cases}$

Решение. Поскольку левые части уравнений тождественно равны, равны и их правые части, т. е. $7x=7y$, откуда $y=x$. Подставим $y=x$ в любое из уравнений системы, например во второе: $(x+6x)^2=7x$, откуда $49x^2=7x$, т. е. $7x^2-x=0$, и, значит, $7x\left(x-\frac{1}{7}\right)=0$. Таким образом, получаем $y=x=0$ либо $y=x=\frac{1}{7}$.

Ответ. $(0; 0)$; $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

Пример 15. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2-2x=y, \\ 3x-2=y. \end{cases}$

Решение. Поскольку левые части уравнений тождественно равны, равны и их правые части, т. е.

$$3x^2-2x=3x-2, \quad \text{откуда} \quad 3x^2-5x+2=0.$$

Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{2}{3}$ и 1. Если $x=\frac{2}{3}$, то $y=3\cdot\frac{2}{3}-2=0$. Если $x=1$, то $y=3\cdot1-2=1$.

Ответ. $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $(1; 1)$.

Пример 16. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y=5, \\ x^2-4y^2=35. \end{cases}$

Решение. Разложив на множители по формуле разности квадратов левую часть второго уравнения данной системы, получим

$$(x-2y)(x+2y)=35,$$

откуда в силу первого уравнения системы

$$(x-2y)\cdot5=35, \quad \text{и} \quad x-2y=7.$$

Сложив почленно уравнения $x-2y=7$ и $x+2y=5$, получим $2x=12$, откуда $x=6$. Тогда $6+2y=5$, откуда $y=-0{,}5$.

Ответ. $(6; -0{,}5)$.

Неравенства, которые в банке ОГЭ предназначены для задания 21 в экзаменационном варианте, либо являются квадратными, либо сводятся к квадратным в одно-два действия. Сложность здесь связана преимущественно с тем, что коэффициенты и/или корни соответствующих квадратных трёхчленов являются иррациональными.

Пример 17. Решите неравенство $(x-1)^2<\sqrt{2}(x-1)$.

Решение. Приведя данное неравенство к виду

$$(x-1)^2-\sqrt{2}(x-1)<0$$

и вынеся за скобки общий множитель, получим неравенство

$$(x-1)(x-1-\sqrt{2}) < 0, \quad \text{откуда } 1 < x < 1+\sqrt{2}.$$

Ответ. $\left(1; 1+\sqrt{2}\right)$.

Наиболее простыми дробно-рациональными неравенствами являются неравенства вида $\frac{a}{f(x)} \vee 0$, где a — отличное от нуля действительное число, а $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. С такими неравенствами по уровню сложности схожи и неравенства вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где один из многочленов $f(x)$ или $g(x)$ является многочленом первой или второй степени, а другой при любых значениях переменной принимает значения одного знака (как правило, положительные). Тем самым знак либо числителя, либо знаменателя алгебраической дроби в левой части указанных неравенств не зависит от значений переменной. Поэтому знак этой дроби будет определяться знаком только одного алгебраического выражения (многочлена первой или второй степени). Таким образом, подобные неравенства решаются приведением их к линейным или квадратным неравенствам.

Пример 18. Решите неравенство $-\frac{1234}{5x+6} < 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на число -1. Получим неравенство $\frac{1234}{5x+6} > 0$. Числитель дроби в левой части неравенства положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $5x+6 > 0$, откуда $x > -1{,}2$.

Ответ. $(-1{,}2; +\infty)$.

Пример 19. Решите неравенство $\frac{4321}{5x^2-41x+8} \leqslant 0$.

Решение. Числитель дроби положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $5x^2-41x+8 < 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа 0,2 и 8, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множеством решений неравенства является интервал $(0{,}2; 8)$.

Ответ. $(0{,}2; 8)$.

Пример 20. Решите неравенство $\frac{-43}{(x-1)^2-2} \geqslant 0$.

Решение. Числитель дроби отрицателен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $(x-1)^2-2 < 0$, откуда $\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right) < 0$. Значит, множеством решений неравенства является интервал $\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Ответ. $\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Подготовительные задачи

1. Найдите значение выражения $19a-7b+12$, если $\dfrac{5a-8b+2}{8a-5b+2}=3$.

2. Решите уравнение $x^3+2x^2-9x-18=0$.

3. Решите уравнение $x^4=(3x-10)^2$.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{4}{x-1}-12=0$.

5. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}+3$.

6. Решите уравнение $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+y=4, \\ 4x^2-y=2. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11, \\ 4x^2+6y^2=11x. \end{cases}$

9. Решите неравенство $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$.

10. Решите неравенство $\dfrac{-13}{(x-4)^2-6}\geqslant 0$.

Зачётные задачи

1. Найдите значение выражения $33a-23b+71$, если $\dfrac{3a-4b+8}{4a-3b+8}=9$.

2. Решите уравнение $x^3+3x^2-4x-12=0$.

3. Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-10=0$.

5. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$.

6. Решите уравнение $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+y=6, \\ 4x^2-y=1. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+3y^2=31, \\ 2x^2+6y^2=31x. \end{cases}$

9. Решите неравенство $(x-5)^2<\sqrt{7}(x-5)$.

10. Решите неравенство $\dfrac{-14}{(x-5)^2-2}\geqslant 0$.

Задание 22

Краткие методические рекомендации

Задание 22 ОГЭ по математике представляет собой традиционную текстовую задачу по одной из трёх тем: «Движение», «Производительность и работа», «Проценты и концентрация». Некоторые из этих задач можно решить арифметически, не прибегая к составлению уравнению, другие требуют составления одного или двух уравнений и их решения.

Задачи на движение

Во всех задачах на движение допускается определённая идеализация: считается, что тела движутся прямолинейно и равномерно, скорости (в том числе скорость течения) постоянны в течение определённых промежутков времени, не меняются при поворотах и т. д., движущиеся тела считаются (если не оговорено противное) материальными точками, т. е. не имеющими размеров и массы (вернее, их размеры и масса несущественны для решения задачи). Даже решение задач на движение по окружности не требует применения специальных понятий — угловой скорости и т. п.; здесь точнее было бы говорить о движении по замкнутой трассе.

При решении задач на движение двух тел часто очень удобно считать одно тело неподвижным, а другое — приближающимся к нему со скоростью, равной сумме скоростей этих тел (при движении навстречу) или разности скоростей (при движении вдогонку). Такая базовая модель помогает разобраться с условием задачи и получить нужные уравнения даже в таком относительно трудном случае, как движение по окружности.

Если расстояние между пунктами, из которых начинают движение два тела, не задано, иногда бывает удобно положить его равным единице.

Основными типами задач на движение являются следующие:

- задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку),
- задачи на движение по замкнутой трассе,
- задачи на движение протяжённых тел,
- задачи на движение по воде,
- задачи на среднюю скорость.

Рассмотрим более подробно каждый из этих типов задач, выделив, где необходимо, базовые задачи.

Если расстояние между двумя движущимися навстречу друг другу телами равно s, а их скорости — v_1 и v_2, то время t, через которое они встретятся, находится по формуле $t=\frac{s}{v_1+v_2}$. Действительно, если одно из тел считать неподвижным, тогда второе будет приближаться к нему со скоростью, равной сумме скоростей, и пройдёт при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 1. Расстояние между городами A и B равно 620 км. Из города A в город B со скоростью 85 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся?

Решение. Через два часа после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно $620-170=450$ (км), поэтому автомобили встретятся через время $t=\frac{450}{85+65}=3$ (ч). Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 5 часов и проедет $85\cdot 5=425$ км.

Ответ. 425 км.

Если расстояние между двумя телами равно s и они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1>v_2$) так, что первое тело следует за вторым, то время t, через которое первое тело догонит второе, находится по формуле $t=\frac{s}{v_1-v_2}$. Действительно, если второе тело считать неподвижным, тогда первое будет приближаться к нему со скоростью, равной разности скоростей, и пройдёт при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 2. Два пешехода отправляются одновременно из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,3 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 520 метрам?

Решение. Время t в часах, за которое расстояние между пешеходами станет равным 520 метрам, т. е. 0,52 (км), находим по формуле $t=\frac{0{,}52}{1{,}3}=0{,}4$ (ч). Следовательно, это время составляет 24 минуты.

Ответ. 24 минуты.

Рассмотрим теперь движение двух точек по окружности (замкнутой трассе) длины s в одном направлении при одновременном старте из одной точки со скоростями v_1 и v_2 ($v_1>v_2$) и ответим на вопрос: через какое время первая точка будет опережать вторую ровно на один круг? Считая, что вторая точка покоится, а первая приближается к ней со скоростью $v_1 - v_2$, получим, что условие задачи будет выполнено, когда первая точка в первый раз поравняется со второй. При этом первая точка пройдёт расстояние, равное длине трассы, и искомая формула ничем не отличается от формулы, полученной для задачи на движение вдогонку: $t = \frac{s}{v_1 - v_2}$. Итак, если две точки одновременно начинают движение по окружности (замкнутой трассе) из одной точки в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$), то первая точка приближается ко второй со скоростью $v_1 - v_2$ и в момент, когда первая точка в первый раз догоняет вторую, она проходит расстояние, ровно на один круг большее, чем вторая.

Пример 3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 80 км/ч, и через 48 минут после старта он опережал второго автомобилиста на один круг. Найдите скорость второго автомобилиста.

Решение. Пусть скорость второго автомобилиста равна x км/ч. Поскольку 48 минут составляют $\frac{4}{5}$ часа и это и есть то время, за которое первый автомобилист будет опережать второго на один круг, составим по условию задачи уравнение: $\frac{12}{80 - x} = \frac{4}{5}$, откуда $320 - 4x = 60$, и $x = 65$.

Ответ. 65 км/ч.

В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, а при движении против течения вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

Пример 4. Рыболов отправляется на лодке от пристани с намерением вернуться через 7 ч. Перед возвращением он хочет пробыть на берегу 4 ч. На какое наибольшее расстояние он может отплыть, если скорость течения реки равна 1 км/ч, а собственная скорость лодки равна 6 км/ч?

Решение. Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 5 км/ч, а при движении по течению равна 7 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\frac{x}{5} + \frac{x}{7}$ ч. Из условия задачи следует, что это время равно 3 ч. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 3$. Решив уравнение, получим $x = 8{,}75$.

Ответ. 8,75 км.

Пример 5. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 26 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 34 ч после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Решение. Пусть искомая величина равна $2x$. Составим по условию задачи уравнение: $\frac{x}{23}+\frac{x}{29}+8=34$, откуда $\frac{x}{23}+\frac{x}{29}=26$. Далее, $\frac{23x+29x}{23\cdot 29}=26$, откуда $52x=23\cdot 29\cdot 26$, и $2x=23\cdot 29=667$.

Ответ. 667 км.

В задачах на движение протяжённых тел требуется, как правило, определить длину одного из них. Наиболее типичная ситуация — определение длины поезда, проезжающего мимо столба или протяжённой платформы. В первом случае поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, во втором случае — расстояние, равное сумме длин поезда и платформы.

Пример 6. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Второй сухогруз сначала отстаёт от первого на 900 метров, но уже через 27 минут опережает первый на 1,6 километра. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение. Будем считать, что первый сухогруз неподвижен, а второй приближается к нему со скоростью x м/мин, равной разности скоростей второго и первого сухогрузов. Тогда за 27 минут второй сухогруз проходит расстояние $l=900+80+120+1600=2700$ (м). Поэтому $x=\frac{2700}{27}=100$ м/мин, т. е. 6 км/ч.

Ответ. 6 км/ч.

Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле $v=\frac{S}{t}$, где S — путь, пройденный телом, а t — время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения. Например, если путь состоял из двух участков протяжённостью s_1 и s_2, скорости на которых были равны соответственно v_1 и v_2, то $S=s_1+s_2$, $t=t_1+t_2$, где $t_1=\frac{s_1}{v_1}$, $t_2=\frac{s_2}{v_2}$.

Пример 7. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, вторую треть — со скоростью 12 км/ч, а последнюю треть — со скоростью 9 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути.

Решение. Обозначим длину всей трассы через $3s$ км. Тогда первую треть трассы велосипедист проехал за время $t_1=\frac{s}{18}$, вторую треть — за время $t_2=\frac{s}{12}$, последнюю треть — за время $t_3=\frac{s}{9}$. Значит, время, потраченное им на весь путь, равно $t_1+t_2+t_3$, т. е.

$$\frac{s}{18}+\frac{s}{12}+\frac{s}{9}=\frac{45s}{180}=\frac{s}{4}.$$

Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле

$$v=\frac{3s}{\frac{s}{4}}=3s\cdot\frac{4}{s}=12\ (\text{км/ч}).$$

Ответ. 12 км/ч.

Задачи на производительность и работу

В определённом смысле задачи на производительность (работу) схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния — объём работы. В тех случаях, когда объём работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице. Существенно разных задач здесь практически нет, во всех случаях речь идёт о выполнении определённой работы, меняются только сюжеты, а «математическая» фабула остаётся одной и той же. Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на работу.

В некоторых случаях при решении задач на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям.

Пример 8. Маша и Даша за день пропалывают 3 грядки, Даша и Глаша — 4 грядки, а Глаша и Маша — 5 грядок. Сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроём?

Решение. Вообразим, что сначала Маша и Даша работали один день, затем Даша и Глаша работали один день, а потом Глаша и Маша работали ещё один день. Получается, что каждая из девочек работала два дня, или что бригада, состоящая из Маши, Глаши и Даши, прополола 3+4+5=12 грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополет вдвое меньше грядок, т. е. 6.

Ответ. 6.

Ключевой в задачах на работу является следующая.

Пример 9. Первый мастер может выполнить некоторую работу за a часов, а второй мастер — за b часов. За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоём?

Решение. Поскольку объём работы не задан, его можно принять равным единице. Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную $\frac{1}{a}$, второй — $\frac{1}{b}$, а оба мастера — $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Значит, всю работу они выполнят за время $t=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Ответ. $t=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ч.

Пример 10. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 12 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение. Вдвоём рабочие за час делают $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ всей работы. За 3 часа первый рабочий сделал $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ всей работы. Оставшиеся $\frac{3}{4}$ работы рабочие делали уже вместе и потратили на это $\frac{3}{4}:\frac{1}{6}=4{,}5$ ч. Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 7,5 часов.

Ответ. 7,5 ч.

Как уже отмечалось, в задачах на бассейны и трубы нет ничего специфического по сравнению с другими задачами на совместную работу. Модельная ситуация остаётся той же, только мастерам будут соответствовать трубы или насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении бассейна или иного резервуара.

Пример 11. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 360 литров она заполняет на 16 минут медленнее, чем вторая труба?

Решение. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту, $x>0$. Тогда вторая труба пропускает $x+6$ литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение: $\frac{360}{x}=\frac{360}{x+6}+16$. Разделив обе части уравнения на 8, получим $\frac{45}{x}=\frac{45}{x+6}+2$, и, следовательно, $\frac{45}{x}-\frac{45}{x+6}=2$. Приведём дроби в левой части к общему знаменателю: $\frac{45(x+6)-45x}{x(x+6)}=2$, откуда $2x(x+6)=45\cdot 6$, и, значит, $x^2+6x-135=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -15 и 9, из которых только последнее удовлетворяет условию $x>0$.

Ответ. 9 л.

Задачи на проценты и концентрацию

Задачи на проценты были рассмотрены ранее. Задачи на концентрацию (т. е. на процентное содержание какого-то вещества в его растворе, сплаве или смеси) традиционно являются слабым звеном в подготовке школьников, кажутся многим из них довольно сложными. В таких задачах речь обычно идёт об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем иногда опускать).

При решении задач на концентрацию, сплавы, смеси целесообразно для наглядности использовать метод, который иногда не вполне научно называют «методом банок». Название появилось потому, что указанные в задаче вещества изображаются в виде условных «банок», каждая из которых делится на две части — верхнюю и нижнюю. В нижней записывается количество «чистого» или «сухого» вещества для каждой «банки», что позволяет почти автоматически получить нужное уравнение или даже ответ. Проиллюстрируем «метод банок» несколькими примерами.

Пример 12. Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 20 кг её 60-процентного и 30 кг её 20-процентного растворов.

Решение. Используем ключевую идею, заключающуюся в отслеживании того, что происходит с чистой кислотой. Изобразим схематически данные в условии растворы и раствор, полученный при их смешивании (т. е. применим «метод банок»):

20 кг		30 кг		50 кг
H_2O		H_2O		H_2O
чистое вещество: $0{,}6\cdot 20=12$	$+$	*чистое вещество*: $0{,}2\cdot 30=6$	$=$	*чистое вещество*: $12+6=18$
60 %		20 %		k %

Искомая концентрация равна

$$k=\frac{18}{50}\cdot 100\,\%=18\cdot 2\,\%=36\,\%.$$

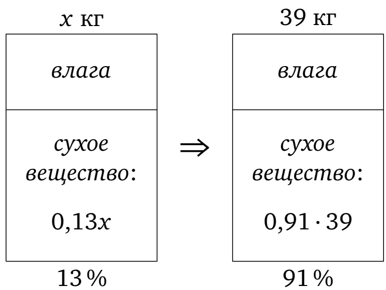
В данном случае можно было бы не использовать формулу: ведь если в 50 кг раствора содержится 18 кг чистой кислоты, то в 100 кг этого раствора будет ровно 36 кг чистой кислоты, т. е. 36 сотых от 100, а значит, искомая концентрация равна 36 %.

Ответ. 36 %.

Иногда вместо «сложения банок» приходится использовать «превращение» одной «банки» в другую.

Пример 13. Виноград содержит 87 % влаги, а изюм — 9 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 39 килограммов изюма?

Решение. Используем ключевую идею: будем следить за массой «чистого», т. е. в данном случае «сухого» вещества в винограде и изюме. Пусть для получения 39 килограммов изюма требуется x кг винограда. Из условия следует, что доля «сухого» вещества в винограде составляет 13 %, а в изюме — 91 %. Поэтому в x кг винограда будет $0{,}13x$ кг «сухого» вещества, а в 39 кг изюма его будет $0{,}91\cdot 39$ кг:



Поскольку эта масса сухого вещества в винограде и изюме одна и та же, получим, что

$$0{,}13x = 0{,}91\cdot 39,$$

откуда

$$13x = 91\cdot 39, \quad \text{и} \quad x = 273 \text{ (кг)}.$$

Ответ. 273 кг.

Решим теперь в общем виде ключевую задачу нахождения концентрации раствора, полученного в результате смешивания двух растворов одного и того же вещества, имеющих разные массы и разную концентрацию.

Пример 14. Смешали a литров n-процентного водного раствора некоторого вещества с b литрами m-процентного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси.

Решение. Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе его было

$$\frac{a}{100}\cdot n = \frac{an}{100} \text{ литров,}$$

во втором растворе —

$$\frac{b}{100}\cdot m = \frac{bm}{100} \text{ литров.}$$

Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно $\frac{an}{100}+\frac{bm}{100}$ литров, а всего этой смеси получится $a+b$ литров:

a литров		b литров		$a+b$ литров
H_2O		H_2O		H_2O
чистое вещество: $\frac{a}{100}\cdot n = \frac{an}{100}$	$+$	*чистое вещество*: $\frac{b}{100}\cdot m = \frac{bm}{100}$	$=$	*чистое вещество*: $\frac{an}{100}+\frac{bm}{100}$
$n\,\%$		$m\,\%$		$k\,\%$

Теперь найти искомую концентрацию k не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{an}{100}+\frac{bm}{100}}{a+b}\cdot 100\,\% = \frac{an+bm}{a+b}\,\%.$$

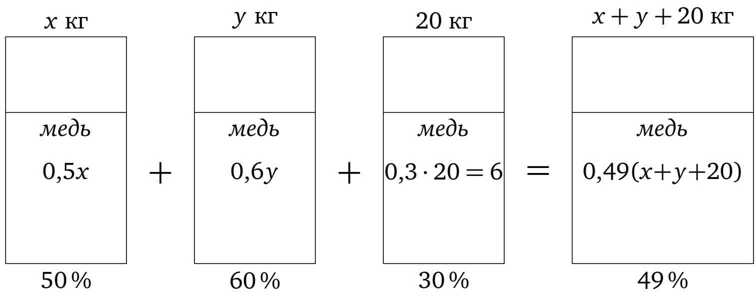
Ответ. $\frac{an+bm}{a+b}\,\%$.

Заметим, что растворы в этой задаче можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь единицы измерения и названия веществ.

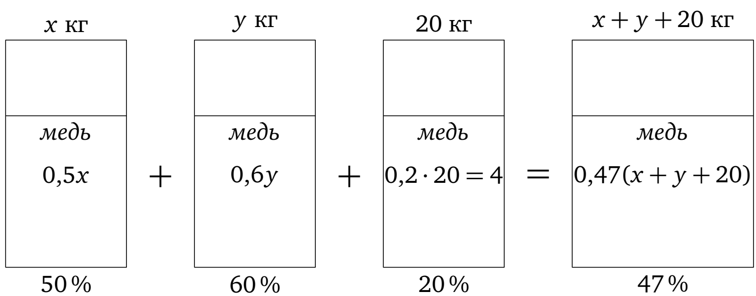
Пример 15. Первый сплав содержит 50 % меди, второй — 60 % меди, а третий сплав весит 20 кг и содержит 30 % меди. Из этих трёх сплавов получили сплав, в котором меди оказалось 49 %. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 20-килограммовый сплав, содержащий 20 % меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 47 %. Найдите массу второго сплава.

Решение. В этой задаче неизвестны массы первого и второго сплавов, но даны два варианта получения третьего сплава. Поэтому схему «метода банок» придётся применить дважды: для случая, когда третий сплав содержит 30 % меди, и для случая, когда он содержит 20 %

меди. Массы первого и второго сплавов (в килограммах) обозначим соответственно через x и y. Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных x и y:

$$\begin{cases} 0{,}5x+0{,}6y+6=0{,}49(x+y+20), \\ 0{,}5x+0{,}6y+4=0{,}47(x+y+20). \end{cases}$$

Чтобы избежать возможных и довольно распространённых ошибок в действиях с дробями, умножим обе части каждого уравнения на 100. Получим

$$\begin{cases} 50x+60y+600=49(x+y+20), \\ 50x+60y+400=47(x+y+20). \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приходим к системе

$$\begin{cases} x+11y=380, \\ 3x+13y=540. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что значение x в данной задаче находить необязательно. Умножим обе части первого уравнения системы на -3. Чтобы исключить переменную x, сложим почленно полученное после умножения на -3 уравнение и второе уравнение системы: $-20y = -600$, откуда $y = 30$.

Ответ. 30 кг.

Подготовительные задачи

1. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 141 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 6 км/ч, за 12 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

2. Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

3. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 180 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 5 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.

4. Моторная лодка прошла против течения реки 208 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 5 часов меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

5. Расстояние между пристанями A и B равно 45 км. От пристани A к пристани B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, доплыв до пристани B, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани A. К этому времени плот проплыл 28 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

6. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 15 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 5 км/ч меньше скорости второго.

7. Первые 200 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а последние 180 км — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

8. Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 200 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

9. Свежие фрукты содержат 75 % воды, а высушенные — 25 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 45 кг высушенных фруктов?

10. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 81 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Зачётные задачи

1. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 44 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

2. Два автомобиля одновременно отправляются в 800-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 36 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 5 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

3. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 224 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 2 км/ч. По пути он сделал остановку на 2 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.

4. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

5. Расстояние между пристанями A и B равно 24 км. От пристани A к пристани B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, доплыв до пристани B, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани A. К этому времени плот проплыл 15 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

6. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 7 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 3 минуты назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 8 км/ч меньше скорости второго.

7. Первые 350 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 105 км — со скоростью 35 км/ч, а последние 160 км — со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

8. Первая труба пропускает на 16 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 105 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

9. Свежие фрукты содержат 89 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 23 кг высушенных фруктов?

10. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Задание 23

Краткие методические рекомендации

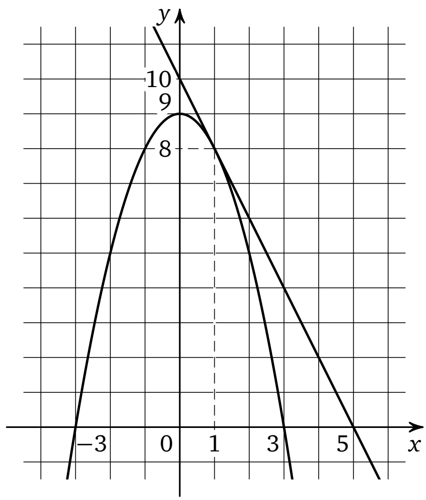
Задание 23 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Графики функций». Это задание можно отнести к относительно сложным, но следует понимать, что сложность эта относительна и в данном случае обусловлена либо формулой, задающей функцию и предполагающей предварительные алгебраические преобразования для получения одной из базовых функций школьного курса (из области определения которой в некоторых случаях придётся исключить одну или две точки), либо самим условием, требующим исследования взаимного расположения графиков двух функций и ответа на определённые вопросы о числе их общих точек в зависимости от некоторой величины. Что качается формулы, задающей функцию, то, как уже отмечалось, после несложных преобразований этой формулы (сокращения дроби, раскрытия модуля, приведения подобных слагаемых) получается формула, задающая элементарную функцию, графиком которой (или частью графика которой) является прямая, парабола, гипербола или их части — возможно, с удалёнными (выколотыми) точками (последние могут появиться в случае задания функции с помощью алгебраической дроби, область определения которой находится из условия неравенства нулю её знаменателя).

Пример 1. Найдите p и постройте в одной системе координат графики функций $y = p - x^2$ и $y = -2x + 10$, если известно, что они имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки.

Решение. Составим уравнение по условию задачи:

$$p - x^2 = 10 - 2x, \quad \text{откуда } x^2 - 2x - p + 10 = 0.$$

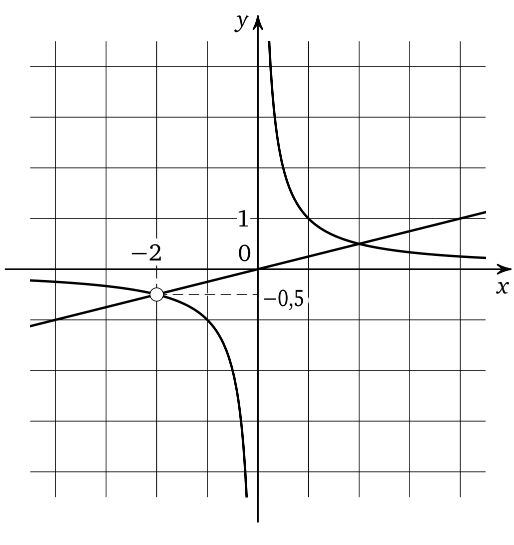
Полученное квадратное уравнение должно иметь единственный корень, являющийся абсциссой общей точки графиков. Значит, дискриминант D этого уравнения равен нулю (или, что то же самое, $\frac{D}{4} = 0$). Из условия $\frac{D}{4} = 0$ получим $1 + p - 10 = 0$, откуда $p = 9$. В этом случае полученное уравнение имеет единственный корень $x = 1$. Ординату общей точки найдём, подставив полученную абсциссу в уравнение прямой. Получим $y = 8$. Данная квадратичная функция имеет вид $y = 9 - x^2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(0; 9)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(-3; 0)$, $(3; 0)$. Графиком функции $y = -2x + 10$



является прямая, проходящая через найденную точку (1; 8) и точку (0; 10). Графики изображены на рисунке.

Ответ. $p=9$; (1; 8).

Пример 2. Постройте график функции $y=\dfrac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Решение. Поскольку

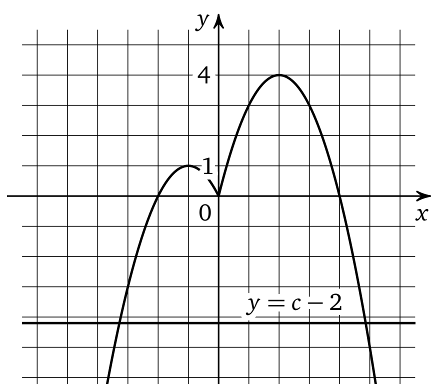
$$\frac{x+2}{x^2+2x}=\frac{x+2}{x(x+2)}=\frac{1}{x} \quad \text{при } x\neq -0{,}5,$$

графиком данной функции является гипербола $y=\dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $(-2; -0{,}5)$. Прямая $y=kx$, проходящая через начало координат, будет иметь с гиперболой ровно одну общую точку, только если она проходит через точку $(-2; -0{,}5)$. В этом случае $k=0{,}25$ и уравнение прямой имеет вид $y=\dfrac{1}{4}x$. График изображён на рисунке.

Ответ. 0,25.

Пример 3. Постройте график функции $y=3|x|+x-x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c-2$ имеет с графиком не менее одной, но не более двух общих точек.

Решение. При $x\geqslant 0$ данная функция имеет вид $y=-x^2+4x$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(2; 4)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(0; 0)$, $(4; 0)$. При $x\leqslant 0$ данная функция имеет вид $y=-x^2-2x$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(-1; 1)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(0; 0)$, $(-2; 0)$. Прямая $y=c-2$ имеет с графиком не менее одной, но не более двух общих точек, если $c-2<0$ или $1<c-2\leqslant 4$, откуда $c\in(-\infty; 2)\cup(3; 6]$. График изображён на рисунке.



Ответ. $(-\infty; 2)\cup(3; 6]$.

Подготовительные задачи

1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 1{,}5x-3 & \text{при } x<2, \\ -1{,}5x+3 & \text{при } 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 3x-10{,}5 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2. Постройте график функции

$$y = |x|(x+2)-3x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2+4)(x-1)}{1-x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-10x+25 & \text{при } x\geqslant 4, \\ x-3 & \text{при } x<4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5. Постройте график функции

$$y = |x^2-x-2|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

6. Постройте график функции

$$y = x^2+11x-4|x+6|+30.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{при } x\geqslant -1, \\ -\dfrac{4}{x} & \text{при } x<-1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

8. Постройте график функции

$$y=\frac{3x+5}{3x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

9. Постройте график функции

$$y=\frac{|x|-1}{|x|-x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

10. Постройте график функции

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{6}-\frac{6}{x}\right|+\frac{x}{6}+\frac{6}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Зачётные задачи

1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2{,}5x - 1 & \text{при } x < 1, \\ -2{,}5x + 4 & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1{,}5x - 8 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2. Постройте график функции

$$y = |x|(x+1) - 5x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2+1)(x-2)}{2-x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{при } x \geqslant 2, \\ x + 1 & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5. Постройте график функции

$$y = |x^2 - 6x + 5|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

6. Постройте график функции

$$y = x^2 - 11x - 2|x-5| + 30.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{при } x \geqslant -1, \\ -\dfrac{9}{x} & \text{при } x < -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

8. Постройте график функции

$$y = \frac{7x-5}{7x^2-5x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

9. Постройте график функции

$$y = \frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

10. Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3{,}5} - \frac{3{,}5}{x}\right| + \frac{x}{3{,}5} + \frac{3{,}5}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Диагностическая работа 1

1. Найдите значение выражения $\frac{1}{4}-\frac{51}{20}$.

2. Между какими числами заключено число $\sqrt{78}$?

1) 25 и 27   2) 4 и 5   3) 77 и 79   4) 8 и 9

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\left(\sqrt{46}+6\right)^2$?

1) 10

2) $82+12\sqrt{46}$

3) $82+6\sqrt{46}$

4) $10+12\sqrt{46}$

4. Найдите корень уравнения

$$(x-5)^2=(x+10)^2.$$

5. На рисунках изображены графики функций вида

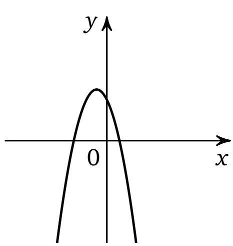
$$y=ax^2+bx+c.$$

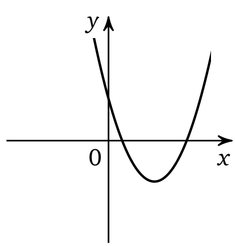
Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

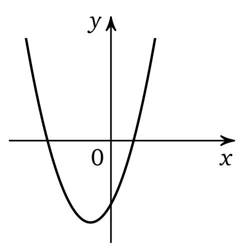
КОЭФФИЦИЕНТЫ

А) $a>0,\ c<0$ Б) $a>0,\ c>0$ В) $a<0,\ c>0$

ГРАФИКИ

1)


2)


3)


В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$175;\ -525;\ 1575;\ \ldots$$

Найдите её четвёртый член.

7. Найдите значение выражения $\frac{4b}{a-b} \cdot \frac{a^2-ab}{8b}$ при $a=19$, $b=8{,}2$.

8. Укажите неравенство, которое *не имеет* решений.

1) $x^2+6x+12>0$

2) $x^2+6x+12<0$

3) $x^2+6x-12<0$

4) $x^2+6x-12>0$

9. Решите уравнение $x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$.

10. Баржа прошла по течению реки 56 км и, повернув обратно, прошла ещё 54 км, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

11. Постройте график функции

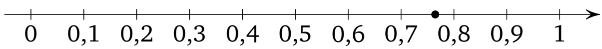
$$y = x^2 - |4x+3|.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 2

1. Найдите значение выражения $\frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

2. Одно из чисел $\frac{10}{17}$; $\frac{11}{17}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{14}{17}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\frac{10}{17}$ 2) $\frac{11}{17}$ 3) $\frac{13}{17}$ 4) $\frac{14}{17}$

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\left(\sqrt{87}-7\right)^2$?

1) $136-14\sqrt{87}$

2) 38

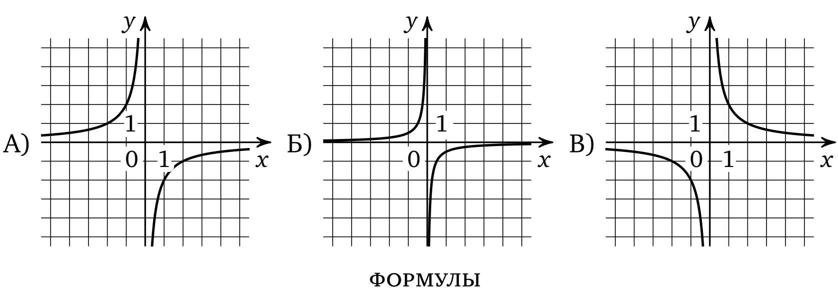
3) $38-14\sqrt{87}$

4) $136-7\sqrt{87}$

4. Решите уравнение $x^2-9=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y=-\frac{1}{2x}$ 2) $y=-\frac{2}{x}$ 3) $y=\frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ 189;\ x;\ 21;\ 7;\ \ldots$$

Найдите x.

7. Найдите значение выражения $\frac{c^2-ac}{a^2}:\frac{c-a}{a}$ при $a=5$, $c=26$.

8. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.

1) $x^2-25>0$

2) $x^2-25<0$

3) $x^2+25<0$

4) $x^2+25>0$

9. Решите уравнение $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0$.

10. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, а вторую — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

11. Постройте график функции

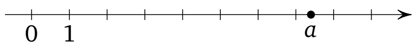
$$y=3|x+7|-x^2-13x-42.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 3

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{5} : \frac{2}{15}$.

2. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $a-6<0$ 2) $a-7>0$ 3) $6-a>0$ 4) $8-a<0$

3. Значение какого из данных ниже выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{17}\cdot\sqrt{19}$

2) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{20}\right)$

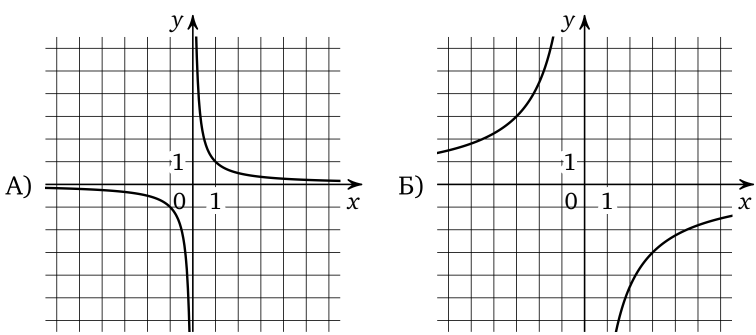
3) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{40}}$

4) $\sqrt{45}-2\sqrt{5}$

4. Решите уравнение $x^2-8x+12=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. На рисунках изображены графики функций вида $y=\frac{k}{x}$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициента k.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k>0$ 2) $k<0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б

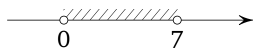
6. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = 4, \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

Найдите b_7.

7. Найдите значение выражения $b + \frac{8a - b^2}{b}$ при $a = -49$, $b = -80$.

8. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2 - 49 < 0$

2) $x^2 - 7x < 0$

3) $x^2 - 49 > 0$

4) $x^2 - 7x > 0$

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 4x = y, \\ 3x - 4 = y. \end{cases}$

10. Первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 180 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

11. Постройте график функции

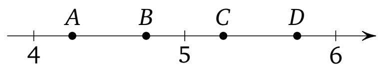
$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & \text{при } x \geqslant -5, \\ -\dfrac{20}{x} & \text{при } x < -5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Диагностическая работа 4

1. Найдите значение выражения $\frac{4{,}8 \cdot 0{,}4}{0{,}6}$.

2. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{33}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

3. Какое из данных ниже чисел является наименьшим?

1) $\sqrt{21}$ 2) $2\sqrt{7}$ 3) $(\sqrt{5})^2$ 4) $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{2}}$

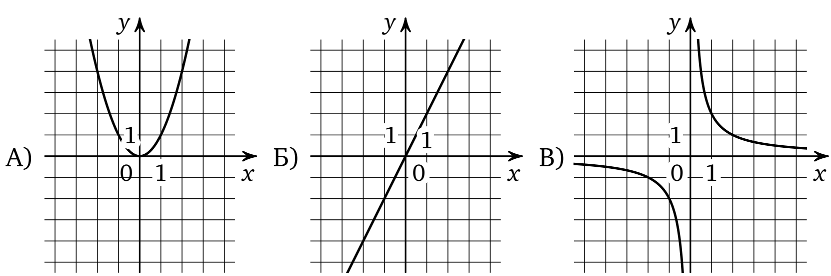
4. Решите уравнение

$$x^2 - 7x = 8.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \frac{2}{x}$ 2) $y = 2x$ 3) $y = x^2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

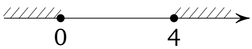
6. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

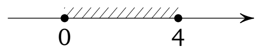
$$b_1 = -6, \quad b_{n+1} = 3b_n.$$

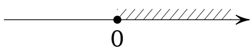
Найдите сумму первых пяти её членов.

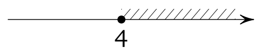
7. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-1}{5a^2+5a}$ при $a=-2$.

8. Укажите решение неравенства $4x - x^2 \leqslant 0$.

1) 

3) 

2) 

4) 

9. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

10. Свежие фрукты содержат 88 % воды, а высушенные — 30 %. Сколько сухих фруктов получится из 35 кг свежих фруктов?

11. Постройте график функции

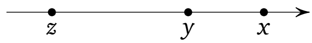
$$y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

Диагностическая работа 5

1. Найдите значение выражения $6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-17\cdot\frac{1}{3}$.

2. На координатной прямой отмечены числа x, y и z.



Какая из разностей $z-x$, $x-y$, $z-y$ положительна?

1) $z-x$

2) $x-y$

3) $z-y$

4) ни одна из них

3. Какое из данных ниже чисел является наибольшим?

1) $\sqrt{26}$ 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$ 3) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ 4) $2\sqrt{6}$

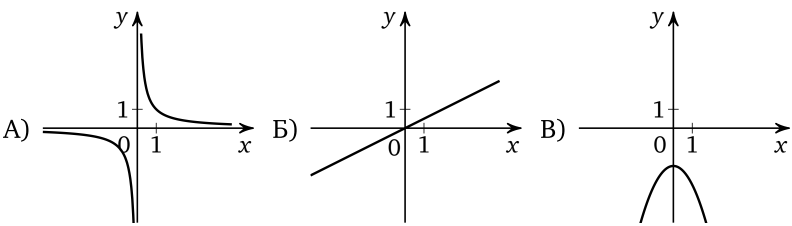
4. Решите уравнение

$$5x^2+9x+4=0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y=\frac{1}{x}$ 2) $y=-x^2-2$ 3) $y=\frac{1}{2}x$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

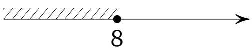
6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

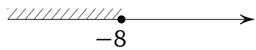
$$1512;\ -252;\ 42;\ \ldots$$

Найдите сумму первых четырёх её членов.

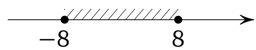
7. Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{ab} : \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ при $a=1\frac{1}{11}$, $b=8\frac{10}{11}$.

8. Укажите решение неравенства $x^2 \leqslant 64$.

1) 

3) 

2) 

4) 

9. Решите неравенство $\frac{-11}{(x-2)^2-3} \geqslant 0$.

10. Имеются два сосуда, содержащие 40 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 33 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 47 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

11. Постройте график функции

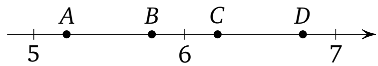
$$y = \frac{3|x|-1}{|x|-3x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

Диагностическая работа 6

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{4}{9}-3\frac{1}{15}\right)\cdot 9$.

2. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{46}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

3. Значение какого из данных ниже выражений является наибольшим?

1) $\sqrt{22}$ 2) $2\sqrt{5}$ 3) $(\sqrt{5})^2$ 4) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{2}}$

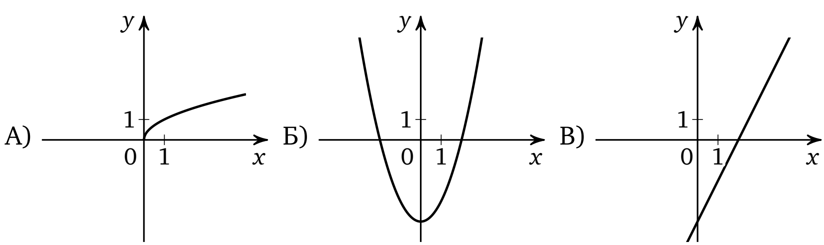
4. Решите уравнение

$$5x^2-12x+7=0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y=\sqrt{x}$ 2) $y=2x-4$ 3) $y=x^2-4$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -7, \quad b_{n+1} = 3b_n.$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

7. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}\right) \cdot \frac{a^2}{8}$ при $a = -4{,}2$.

8. Укажите неравенство, которое *не имеет* решений.

1) $x^2 + 6x - 51 > 0$

2) $x^2 + 6x - 51 < 0$

3) $x^2 + 6x + 51 > 0$

4) $x^2 + 6x + 51 < 0$

9. Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

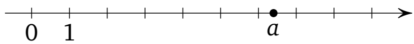
10. Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 56 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 182 км, скорость первого велосипедиста равна 13 км/ч, скорость второго — 15 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

11. Постройте график функции $y = |x^2 + x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Диагностическая работа 7

1. Найдите значение выражения $(8 \cdot 10^2)^2 \cdot (3 \cdot 10^{-2})$.

2. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $a-4<0$ 2) $a-6>0$ 3) $6-a>0$ 4) $7-a<0$

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{\sqrt{320}}{\sqrt{5}}$?

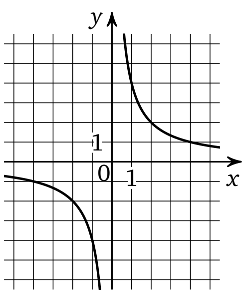
1) 40 2) 8 3) $8\sqrt{5}$ 4) $64\sqrt{5}$

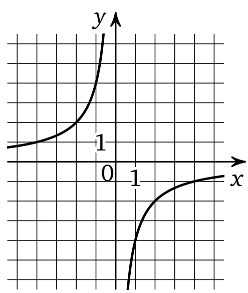
4. Решите уравнение $(x-2)(-x-3)=0$.

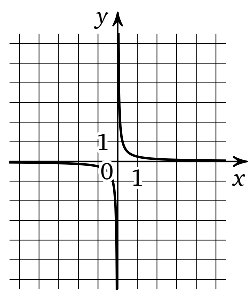
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y=-\frac{4}{x}$ 2) $y=\frac{4}{x}$ 3) $y=\frac{1}{4x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

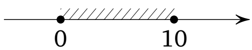
6. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

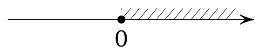
$$\ldots;\ 1{,}5;\ x;\ 24;\ -96;\ \ldots$$

Найдите x.

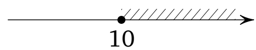
7. Найдите значение выражения $\dfrac{7b}{a-b}\cdot\dfrac{a^2-ab}{35b}$ при $a=61$, $b=2{,}8$.

8. Укажите решение неравенства $10x-x^2<0$.

1) 

3) 

2) 

4) 

9. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+2y^2=50,\\ 12x^2+8y^2=50x.\end{cases}$

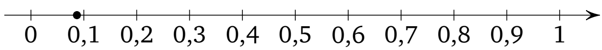
10. Свежие фрукты содержат 93 % воды, а высушенные — 16 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 21 кг высушенных фруктов?

11. Постройте график функции $y=\dfrac{(0{,}5x^2-0{,}5x)|x|}{x-1}$. Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Диагностическая работа 8

1. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{44}}$.

2. Одно из чисел $\dfrac{2}{23}$; $\dfrac{3}{23}$; $\dfrac{5}{23}$; $\dfrac{11}{23}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\dfrac{2}{23}$ 2) $\dfrac{3}{23}$ 3) $\dfrac{5}{23}$ 4) $\dfrac{11}{23}$

3. Какое из данных ниже выражений при любых значениях k равно степени 5^{2-k}?

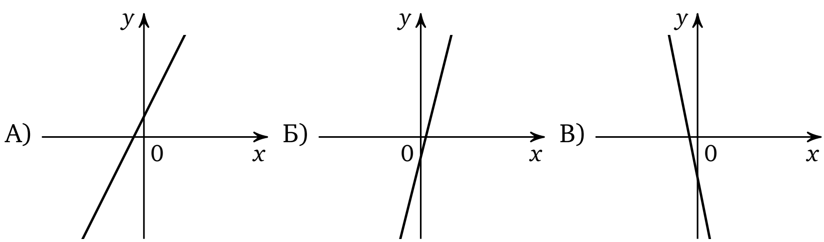
1) $\dfrac{5^2}{5^{-k}}$ 2) $\dfrac{5^2}{5^k}$ 3) 5^2-5^k 4) -10^k

4. Найдите корень уравнения

$$-5+9x=10x+4.$$

5. На рисунках изображены графики функций вида $y=kx+b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k>0$, $b<0$ 2) $k<0$, $b<0$ 3) $k>0$, $b>0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

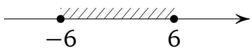
6. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

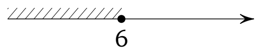
$$a_8 = 0{,}6, \quad a_{23} = 2{,}1.$$

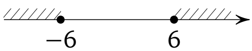
Найдите разность прогрессии.

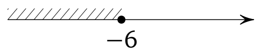
7. Найдите значение выражения $\frac{a+2x}{a} : \frac{ax+2x^2}{a^2}$ при $a=23$, $x=5$.

8. Укажите решение неравенства $x^2 \leqslant 36$.

1) 

3) 

2) 

4) 

9. Решите неравенство $\frac{-12}{(x+6)^2-3} \geqslant 0$.

10. Имеются два сосуда, содержащие 24 кг и 26 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 39 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

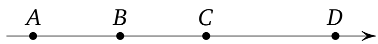
11. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+1)(x+2)}{-2-x}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Диагностическая работа 9

1. Найдите значение выражения $\frac{24}{4\cdot 4{,}8}$.

2. На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам 0,271; −0,112; 0,041; −0,267.

Какой точке соответствует число 0,271?



1) A 2) B 3) C 4) D

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\frac{12}{(3\sqrt{8})^2}$?

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{4}{3}$

4. Решите уравнение $x^2+20=9x$.

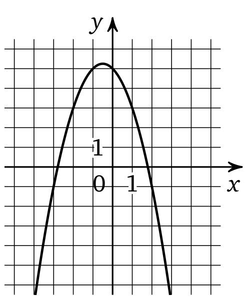
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

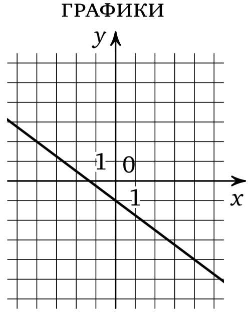
5. Установите соответствие между функциями и их графиками.

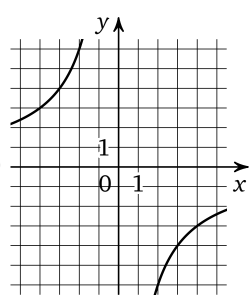
ФУНКЦИИ

А) $y=-x^2-x+5$ Б) $y=-\frac{3}{4}x-1$ В) $y=-\frac{12}{x}$

ГРАФИКИ

1)


2)


3)


В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: -8; 1; 10; … Найдите седьмой член этой прогрессии.

7. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2-xy}{12y}\cdot\frac{4y}{x-y}$$

при $x=7{,}8$, $y=17$.

8. Укажите решение неравенства

$$2x-6>4x+8.$$

1) $(-\infty;\,1)$ 2) $(1;\,+\infty)$ 3) $(-\infty;\,-7)$ 4) $(-7;\,+\infty)$

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9x^2-7x=y, \\ 9x-7=y. \end{cases}$

10. Моторная лодка прошла против течения реки 221 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

11. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+4x+4 & \text{при } x\geqslant -5, \\ -\dfrac{45}{x} & \text{при } x<-5. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Диагностическая работа 10

1. Найдите значение выражения $\dfrac{1{,}6}{2{,}6-1{,}8}$.

2. Какому из данных промежутков принадлежит число $\dfrac{9}{13}$?

1) $[0{,}5;\ 0{,}6]$ 2) $[0{,}6;\ 0{,}7]$ 3) $[0{,}7;\ 0{,}8]$ 4) $[0{,}8;\ 0{,}9]$

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\dfrac{4^{-2}\cdot 4^{-6}}{4^{-5}}$?

1) 64 2) $-\dfrac{1}{64}$ 3) $\dfrac{1}{64}$ 4) -64

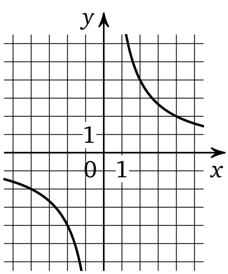
4. Найдите корень уравнения $\dfrac{4}{x+3}=5$.

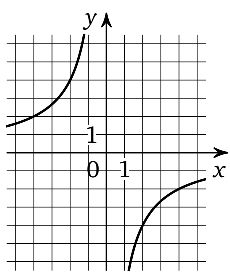
5. Установите соответствие между функциями и их графиками.

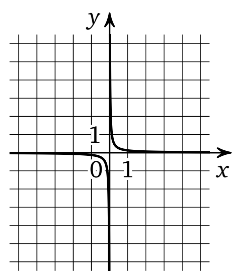
ФУНКЦИИ

А) $y=\dfrac{8}{x}$ Б) $y=\dfrac{1}{8x}$ В) $y=-\dfrac{8}{x}$

ГРАФИКИ

1)


2)


3)


В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$0{,}25;\ 1;\ 4;\ \ldots$$

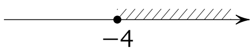
Найдите сумму первых пяти её членов.

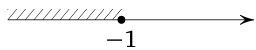
7. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{8x}-\frac{8x+8y}{64xy}$$

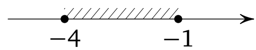
при $x=\sqrt{30}$, $y=\frac{1}{4}$.

8. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x<-1, \\ -4-x<0. \end{cases}$

1) 

3) 

2) нет решений

4) 

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2+y=5, \\ 3x^2-y=2. \end{cases}$

10. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 3 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 6 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 5 км/ч меньше скорости второго.

11. Постройте график функции

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{4}-\frac{4}{x}\right|+\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Диагностическая работа 11

1. Найдите значение выражения $(9\cdot10^{-2})^2\cdot(11\cdot10^5)$.

2. Какое из данных чисел принадлежит промежутку [5; 6]?

1) $\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{28}$ 4) $\sqrt{41}$

3. Значение какого из данных ниже выражений является иррациональным числом?

1) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{2}$
3) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$
2) $(\sqrt{17}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{17}+\sqrt{18})$
4) $\sqrt{45}-\sqrt{5}$

4. Найдите корень уравнения

$$(x+10)^2=(x-9)^2.$$

5. На рисунках изображены графики функций вида

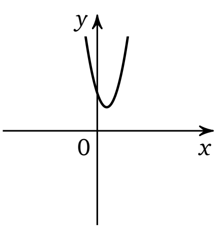
$$y=ax^2+bx+c.$$

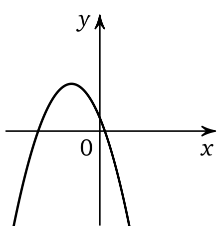
Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

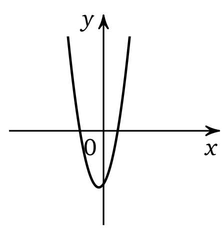
КОЭФФИЦИЕНТЫ

А) $a<0,\ c>0$ Б) $a>0,\ c>0$ В) $a>0,\ c<0$

ГРАФИКИ

1)


2)


3)


В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-25;\ -20;\ -16;\ \ldots$$

Найдите её четвёртый член.

7. Найдите значение выражения $\frac{9b}{a-b} \cdot \frac{a^2-ab}{18b}$ при $a=81$, $b=7{,}7$.

8. Укажите неравенство, которое *не имеет* решений.

1) $x^2-8x-83>0$

2) $x^2-8x+83<0$

3) $x^2-8x-83<0$

4) $x^2-8x+83>0$

9. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{4-x}=\sqrt{4-x}+15$.

10. Баржа прошла по течению реки 48 км и, повернув обратно, прошла ещё 42 км, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

11. Постройте график функции

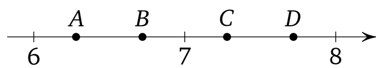
$$y = x^2 - |4x+5|.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 12

1. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{42}}$.

2. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{53}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

3. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\left(\sqrt{62}+3\right)^2$?

1) $53+6\sqrt{62}$

2) $71+6\sqrt{62}$

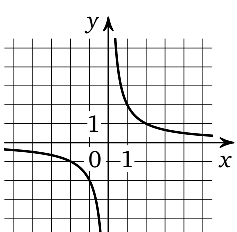
3) $71+3\sqrt{62}$

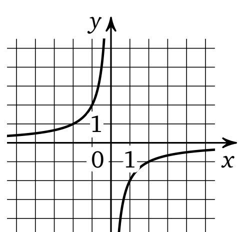
4) 53

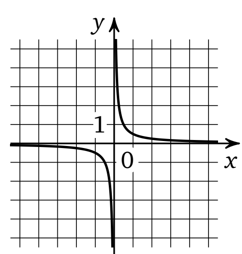
4. Решите уравнение $x^2-121=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y=\dfrac{2}{x}$ 2) $y=\dfrac{1}{2x}$ 3) $y=-\dfrac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ -3;\ x;\ -27;\ -81;\ \ldots$$

Найдите x.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{c^2-2ac}{a^2}:\dfrac{c-2a}{a}$ при $a=4$, $c=46$.

8. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.

1) $x^2+64\geqslant 0$

2) $x^2-64\leqslant 0$

3) $x^2-64\geqslant 0$

4) $x^2+64\leqslant 0$

9. Решите уравнение $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0$.

10. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 69 км/ч, а вторую — со скоростью 111 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

11. Постройте график функции

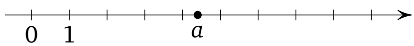
$$y=2|x-4|-x^2+9x-20.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 13

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\cdot 9$.

2. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $a-4<0$ 2) $7-a<0$ 3) $a-3>0$ 4) $2-a>0$

3. Какое из данных ниже чисел является наибольшим?

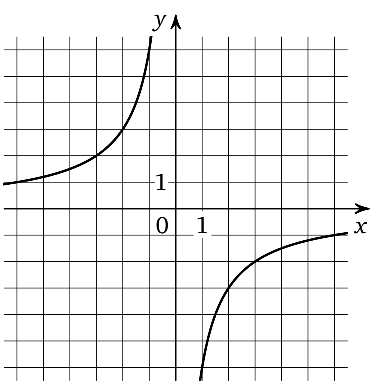
1) $\sqrt{10}$ 2) $2\sqrt{3}$ 3) 3 4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$

4. Решите уравнение $x^2-10x+24=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

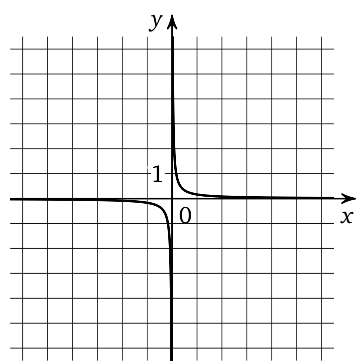
5. На рисунках изображены графики функций вида $y=\frac{k}{x}$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициента k.

ГРАФИКИ

А)



Б)



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k>0$ 2) $k<0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б

6. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = 6, \quad b_{n+1} = -4b_n.$$

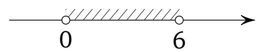
Найдите b_4.

Ответ. -384.

7. Найдите значение выражения $9b + \frac{5a - 9b^2}{b}$ при $a = 9$, $b = 18$.

Ответ. 2,5.

8. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2 - 36 < 0$

2) $x^2 - 6x < 0$

3) $x^2 - 6x > 0$

4) $x^2 - 36 > 0$

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y. \end{cases}$

10. Первый рабочий за час делает на 9 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 216 деталей, на 4 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

11. Постройте график функции

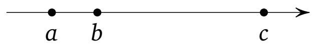
$$y = \begin{cases} x^2 + 8x + 16 & \text{при } x \geqslant -5, \\ -\dfrac{5}{x} & \text{при } x < -5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Диагностическая работа 14

1. Найдите значение выражения $\left(1\frac{3}{4}+2\frac{4}{5}\right)\cdot 30$.

2. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.



Какая из разностей $a-b$, $c-a$, $b-c$ положительна?

1) $a-b$

2) $c-a$

3) $b-c$

4) ни одна из них

3. Какое из данных ниже чисел является наибольшим?

1) $\sqrt{20}$ 2) $3\sqrt{3}$ 3) $\left(\sqrt{5}\right)^2$ 4) $\frac{\sqrt{38}}{\sqrt{2}}$

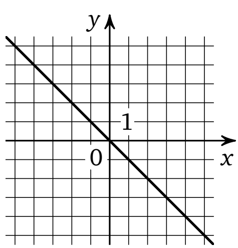
4. Решите уравнение

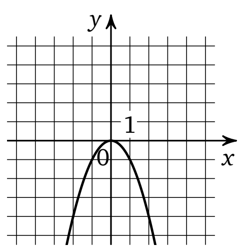
$$x^2+4x=5.$$

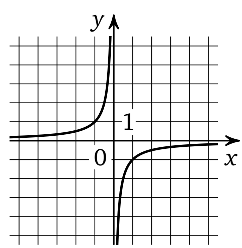
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y=-x^2$ 2) $y=-x$ 3) $y=-\frac{1}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

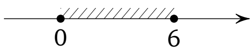
6. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

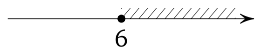
$$b_1 = -7, \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

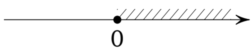
Найдите сумму первых шести её членов.

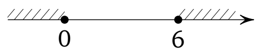
7. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-81}{2a^2+18a}$ при $a=-4{,}5$.

8. Укажите решение неравенства $6x - x^2 \leqslant 0$.

1) 

3) 

2) 

4) 

9. Решите неравенство $(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4)$.

10. Свежие фрукты содержат 84 % воды, а высушенные — 16 %. Сколько сухих фруктов получится из 231 кг свежих фруктов?

11. Постройте график функции

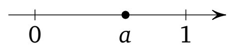
$$y = 5 - \frac{x+5}{x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

Диагностическая работа 15

1. Найдите значение выражения $1\frac{1}{12} : \left(1\frac{13}{18} - 2\frac{5}{9}\right)$.

2. На координатной прямой отмечено число a.



Расположите в порядке возрастания числа $a-1$, $\frac{1}{a}$, a.

1) $a-1, \frac{1}{a}, a$ 2) $a, \frac{1}{a}, a-1$ 3) $a-1, a, \frac{1}{a}$ 4) $a, a-1, \frac{1}{a}$

3. Значение какого из данных ниже выражений является иррациональным числом?

1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$

2) $\left(\sqrt{22}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{22}+\sqrt{7}\right)$

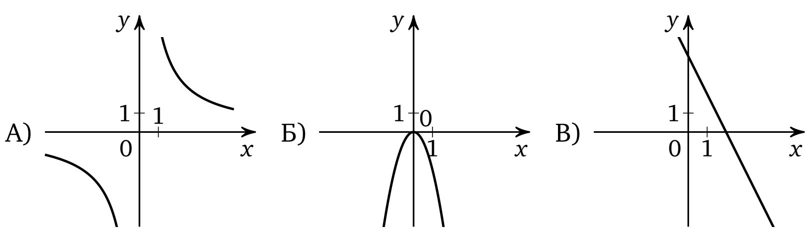
3) $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{2}}$

4) $\sqrt{8}-2\sqrt{2}$

4. Решите уравнение $5x^2-9x+4=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \frac{6}{x}$ 2) $y = -2x+4$ 3) $y = -2x^2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

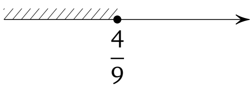
6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

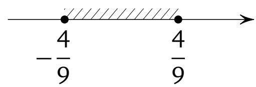
$$0{,}5;\ 2;\ 8;\ \ldots$$

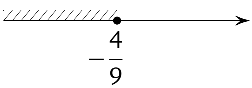
Найдите сумму первых шести её членов.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-16b^2}{4ab}:\left(\dfrac{1}{4b}-\dfrac{1}{a}\right)$ при $a=3\dfrac{1}{13}$, $b=4\dfrac{3}{13}$.

8. Укажите решение неравенства $81x^2\leqslant 16$.

1) 

3) 

2) 

4) 

9. Решите неравенство $\dfrac{-10}{(x-3)^2-5}\geqslant 0$.

10. Имеются два сосуда, содержащие 22 кг и 18 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 32 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 30 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

11. Постройте график функции

$$y=\frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

Ответы

Задание 1

Подготовительные задачи. **1.** 10,1. **2.** 1,6. **3.** 70,29. **4.** 12. **5.** 1,16. **6.** −0,1. **7.** 1,8. **8.** 3,3. **9.** 93,8. **10.** −69,5.
Зачётные задачи. **1.** 0,5. **2.** −2. **3.** 0,8. **4.** −30. **5.** 28 080. **6.** 30 400. **7.** 264. **8.** 1,75. **9.** −8,75. **10.** −2.

Задание 2

Подготовительные задачи. **1.** 4. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 3.
Зачётные задачи. **1.** 3. **2.** 2. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 2. **10.** 3.

Задание 3

Подготовительные задачи. **1.** 3. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 2. **5.** 4. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 2.
Зачётные задачи. **1.** 1. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 1. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 4. **10.** 5.

Задание 4

Подготовительные задачи. **1.** −0,1. **2.** −5. **3.** −10,6. **4.** 4. **5.** −10. **6.** −2. **7.** −6. **8.** 3. **9.** 0,5. **10.** −3,5.
Зачётные задачи. **1.** −0,9. **2.** −0,7. **3.** −5,8. **4.** 5. **5.** −16. **6.** 10. **7.** 5. **8.** 2. **9.** 0,2. **10.** −0,6.

Задание 5

Подготовительные задачи. **1.** А2; Б1; В3. **2.** А2; Б3; В1. **3.** А1; Б3; В2. **4.** А1; Б2; В3. **5.** А3; Б2; В1. **6.** А2; Б1; В3. **7.** А3; Б1; В2. **8.** 5. **9.** А3; Б1; В2. **10.** А1; Б3; В2.
Зачётные задачи. **1.** А3; Б2; В1. **2.** А2; Б1; В3. **3.** А3; Б1; В2. **4.** А1; Б2; В3. **5.** А3; Б1; В2. **6.** А2; Б1; В3. **7.** А1; Б3; В2. **8.** −12. **9.** А3; Б2; В1. **10.** А3; Б2; В1.

Задание 6

Подготовительные задачи. **1.** −40,8. **2.** −4. **3.** −1,5. **4.** −25,2. **5.** −22. **6.** 0,16. **7.** −15. **8.** −192. **9.** −615. **10.** −1562.
Зачётные задачи. **1.** −11. **2.** −1,9. **3.** 23. **4.** 29. **5.** −6. **6.** −71,68. **7.** −54. **8.** −128. **9.** −1094. **10.** −511,5.

Задание 7

Подготовительные задачи. **1.** 15. **2.** −1218. **3.** −3,6. **4.** −6. **5.** 0,6. **6.** 1,4. **7.** 7,4. **8.** 39,5. **9.** 3,5. **10.** 30.
Зачётные задачи. **1.** 10. **2.** 452. **3.** −2,5. **4.** −0,4. **5.** 0,75. **6.** 1,5. **7.** −0,6. **8.** 2,4. **9.** −1,5. **10.** 36.

Задание 8

Подготовительные задачи. **1.** 1. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 3.

Зачётные задачи. **1.** 2. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 1. **5.** 3. **6.** 1. **7.** 3. **8.** 2. **9.** 1. **10.** 4.

Задание 21

Подготовительные задачи. **1.** 8. **2.** $\{-3; -2; 3\}$. **3.** $\{-5; 2\}$. **4.** $\left\{\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right\}$. **5.** -1. **6.** -4. **7.** $(1; 2)$; $(-1; 2)$. **8.** $(2; 1)$; $(2; -1)$. **9.** $\left(3; 3+\sqrt{5}\right)$. **10.** $\left(4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6}\right)$.

Зачётные задачи. **1.** 7. **2.** $\{-3; -2; 2\}$. **3.** $\{-5; 3\}$. **4.** 0,8; 1,5. **5.** -2. **6.** -2. **7.** $(1; 3)$; $(-1; 3)$. **8.** $(2; 3)$; $(2; -3)$. **9.** $\left(5; 5+\sqrt{7}\right)$. **10.** $\left(5-\sqrt{2}; 5+\sqrt{2}\right)$.

Задание 22

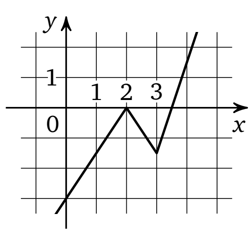
Подготовительные задачи. **1.** 450 м. **2.** 80 км/ч. **3.** 15 км/ч. **4.** 21 км/ч. **5.** 16 км/ч. **6.** 11 км/ч. **7.** 56 км/ч. **8.** 20 л. **9.** 135 кг. **10.** 18,6 кг.

Зачётные задачи. **1.** 400 м. **2.** 96 км/ч. **3.** 14 км/ч. **4.** 16 км/ч. **5.** 25 км/ч. **6.** 12 км/ч. **7.** 61,5 км/ч. **8.** 14 л. **9.** 161 кг. **10.** 23,1 кг.

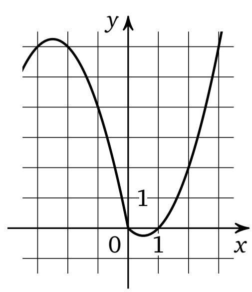
Задание 23

Подготовительные задачи.

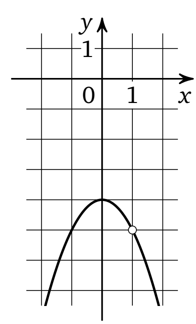
1. $-1{,}5; 0$.



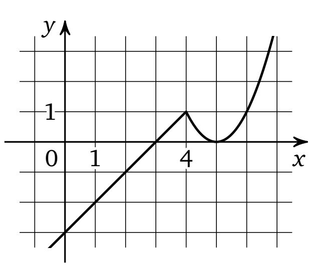
2. $-0{,}25; 6{,}25$.



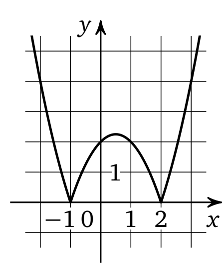
3. $-5; -4; 4$.



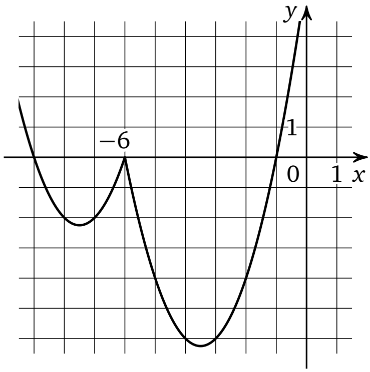
4. 0; 1.



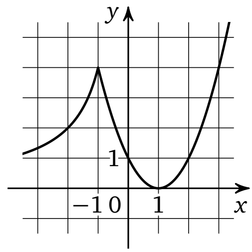
5. 4.



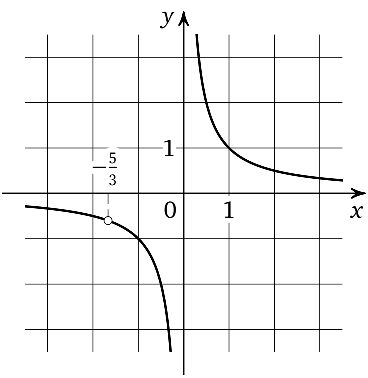
6. $-2{,}25$; 0.



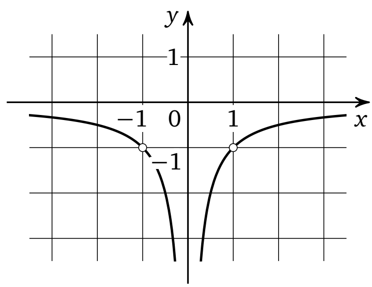
7. $\{0\} \cup [4; +\infty)$.



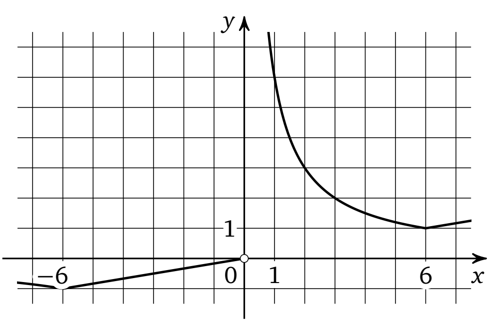
8. 0,36.



9. -1; 0; 2.

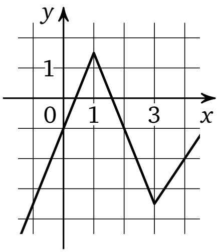


10. -1; 1.

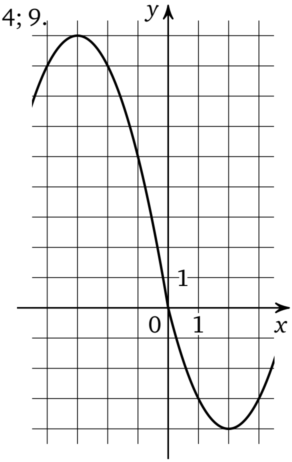


Зачётные задачи.

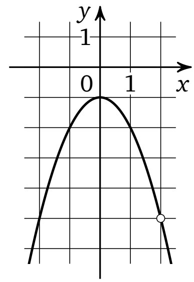
1. $-3{,}5$; $1{,}5$.



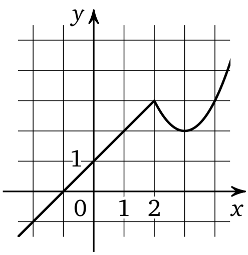
2. -4; 9.



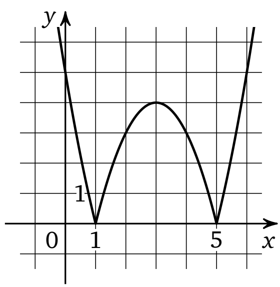
3. $-2{,}5$; -2; 2.



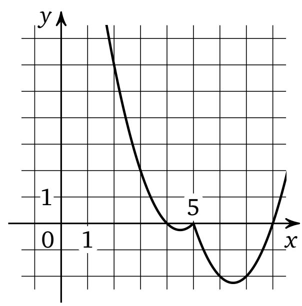
4. 2; 3.



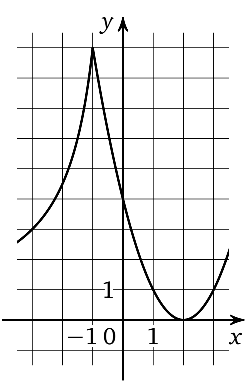
5. 4.



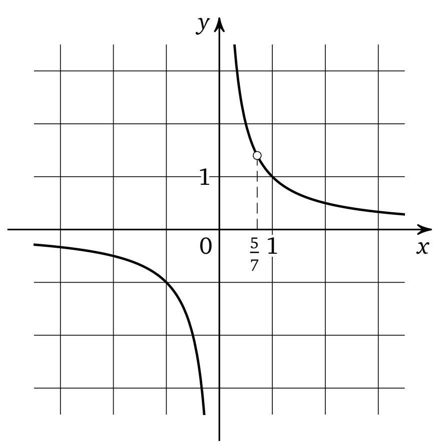
6. $-0{,}25$; 0.



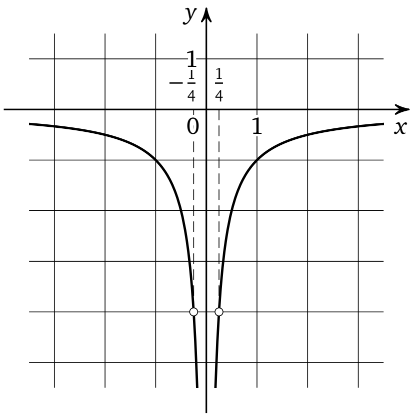
7. $\{0\} \cup [9; +\infty)$.



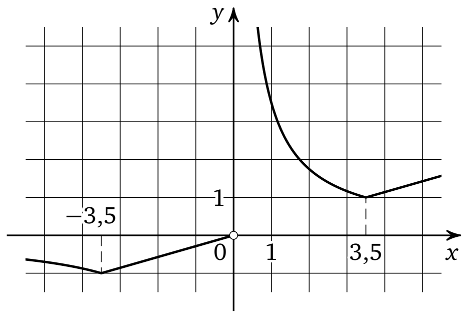
8. $1{,}96$.



9. $-16; 0; 16.$



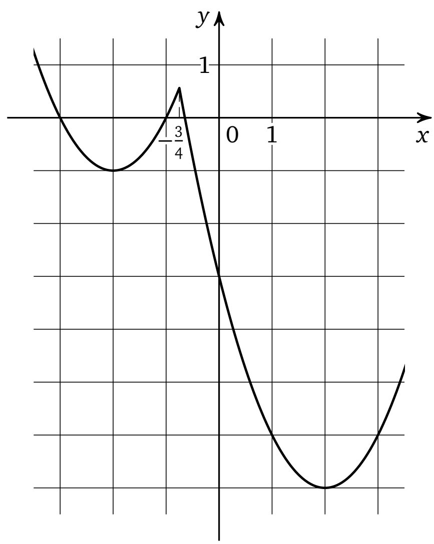
10. $-1; 1.$



Диагностическая работа 1

1. $-2{,}3.$ **2.** 4.
3. 2.**4.** $-2{,}5.$
5. А3; Б2; В1.
6. $-4725.$ **7.** 9,5.
8. 2. **9.** $-3.$
10. 23 км/ч.

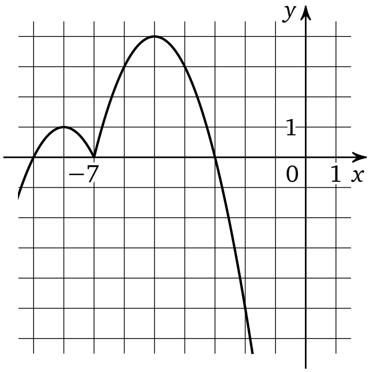
11. $-1; \frac{9}{16}.$



Диагностическая работа 2

1. 1,2. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 3. **5.** А2; Б1; В3. **6.** 63. **7.** 5,2. **8.** 1.
9. $-6.$ **10.** 99 км/ч.

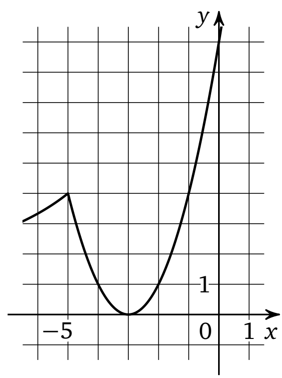
11. 0; 1.



Диагностическая работа 3

1. 4,5. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 6.
5. А1; Б2. **6.** 256. **7.** 4,9. **8.** 2.
9. $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$; $(1; -1)$. **10.** 15.

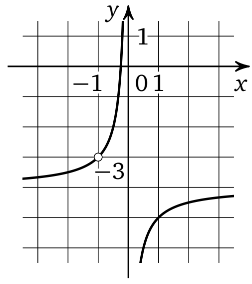
11. $\{0\} \cup [4; +\infty)$.



Диагностическая работа 4

1. 3,2. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 8.
5. А3; Б2; В1. **6.** −726. **7.** 0,3.
8. 1. **9.** $\left(2; 2+\sqrt{3}\right)$. **10.** 6 кг.

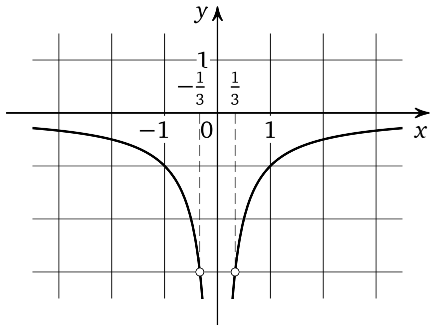
11. $-1; -3$.



Диагностическая работа 5

1. -5. **2.** 2. **3.** 1. **4.** $-0{,}8$. **5.** А1; Б3; В2. **6.** 1295. **7.** 10. **8.** 4. **9.** $\left(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$. **10.** 2 кг.

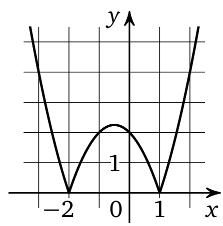
11. -9; 0; 9.



Диагностическая работа 6

1. $-23{,}6$. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 1,4. **5.** А1; Б3; В2. **6.** -847. **7.** $-0{,}18$. **8.** 4. **9.** $(8; 8+\sqrt{3})$. **10.** 104 км.

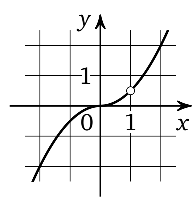
11. 4.



Диагностическая работа 7

1. 19 200. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 2. **5.** А2; Б1; В3. **6.** -6. **7.** 12,2. **8.** 2. **9.** $(4; 1)$; $(4; -1)$. **10.** 252 кг.

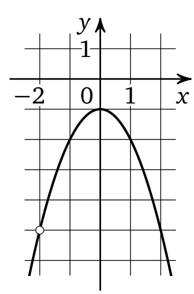
11. 0,5.



Диагностическая работа 8

1. 198. **2.** 1. **3.** 2. **4.** -9. **5.** А3; Б1; В2. **6.** 0,1. **7.** 4,6. **8.** 1. **9.** $\left(-6-\sqrt{3}; -6+\sqrt{3}\right)$. **10.** 15,6 кг.

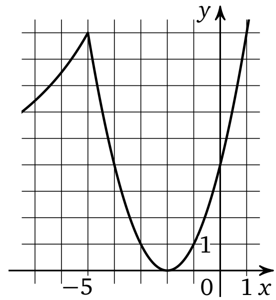
11. 2,5; -2; 2.



Диагностическая работа 9

1. 1,25. **2.** 4. **3.** 2.
4. 5. **5.** А1; Б2; В3.
6. 46. **7.** 2,6. **8.** 3.
9. (1; 2); $\left(\frac{7}{9}; 0\right)$. **10.** 30 км/ч.

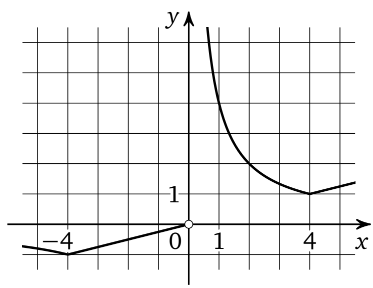
11. $\{0\} \cup [9; +\infty)$.



Диагностическая работа 10

1. 2. **2.** 2. **3.** 3.
4. −2,2. **5.** А1; Б3; В2.
6. 82,25. **7.** −0,5.
8. 4. **9.** (1; 1); (−1; 1).
10. 15 км/ч.

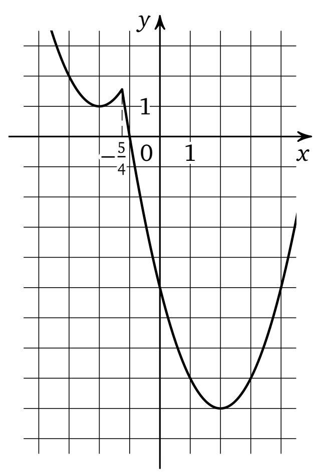
11. −1; 1.



Диагностическая работа 11

1. 9810. **2.** 3. **3.** 4.
4. −0,5. **5.** А2; Б1; В3.
6. −12,8. **7.** 40,5.
8. 2. **9.** −3.
10. 19 км/ч.

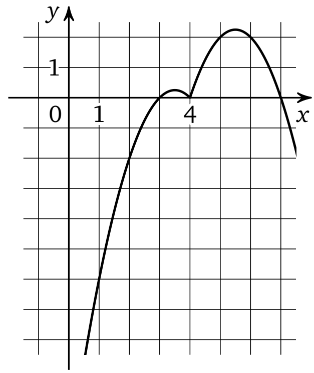
11. 1; $\frac{25}{16}$.



Диагностическая работа 12

1. 17,5. **2.** 3. **3.** 2.
4. -11. **5.** А1; Б3; В2.
6. -9. **7.** 11,5.
8. 3. **9.** -3.
10. 85,1 км/ч.

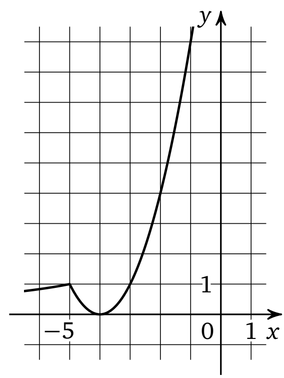
11. 0; 0,25.



Диагностическая работа 13

1. 3,75. **2.** 3. **3.** 2.
4. 4. **5.** А2; Б1.
6. -384. **7.** 2,5.
8. 2. **9.** $\left(\frac{5}{7}; 0\right)$; $(1; 2)$.
10. 18.

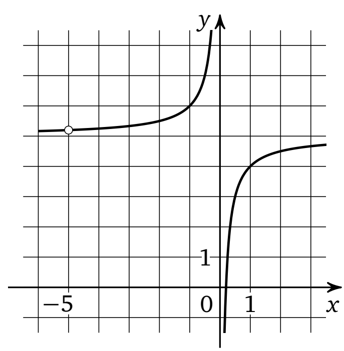
11. $\{0\} \cup [1; +\infty)$.



Диагностическая работа 14

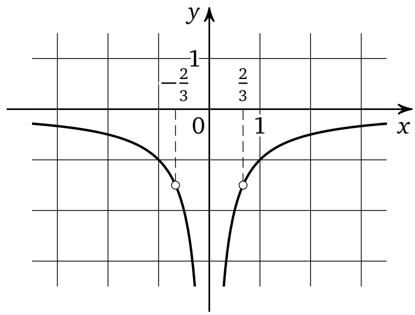
1. 136,5. **2.** 2. **3.** 2.
4. -5. **5.** А2; Б1; В3.
6. -441. **7.** 1,5.
8. 4. **9.** $(4; 4+\sqrt{6})$.
10. 44 кг.

11. 5; 5,2.



Диагностическая работа 15

1. $-1{,}3$. **2.** 3. **3.** 3.
4. 0,8. **5.** А1; Б3; В2.
6. 682,5. **7.** 20.
8. 3. **9.** $\left(3-\sqrt{5};\, 3+\sqrt{5}\right)$.
10. 11 кг.
11. $-2{,}25$; 0; 2,25.



Содержание

Учебно-методическое пособие

Иван Валериевич Ященко
Сергей Алексеевич Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра

Подписано в печать 30.06.2017 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 9,5. Тираж 5000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499)241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru